

Podvádžanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas skúšky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry II., 7. máj 2025

1. (5 bodov) Nech:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Nájdite charakteristický polynóm a vlastné hodnoty matice A .
 - Pre každú vlastnú hodnotu matice A určite jej algebraickú a geometrickú násobnosť.
 - Nájdite minimálny polynóm a Jordanov tvar matice A .
 - Nájdite maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.
2. (5 bodov) Uvažujme reálnu regulárnu 2×2 maticu A , pričom $A^T \sim A + A^{-1}$ (t.j. sú podobné).
- Nájdite stopy matíc A^T , A a A^{-1} .
 - Nájdite determinant matice $I + A^{-2}$.
 - Aké vlastné hodnoty môže mať matica A ? Musí byť A diagonalizovateľná?
 - Nájdite príklad takej matice A .
3. (5 bodov) Nech A je reálna alebo komplexná matica so zložkami a_{ij} a vlastnými hodnotami λ_i . Ukážte, že platí *Schurova nerovnosť* a zistite, pre aké matice v nej nastáva rovnosť:

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

Pomôcka: Ukážte pre hornú trojuholníkovú maticu T a pozrite sa na diagonály matíc TT^H a AA^H .

4. (5 bodov) (pravda/nepravda) Zdôvodnite v pravdivom prípade, uveďte protipríklad v nepravdivom.
- Ak J je Jordanov blok veľkosti 3×3 pre vlastnú hodnotu $\lambda = 4$, potom existuje matica K taká, že platí $K^2 = J$.
 - Ak matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ spĺňa vzťah $A^3 = A^2$, potom je A diagonalizovateľná.
 - Existuje permutačná 4×4 matica, ktorá nemá reálnu vlastnú hodnotu.