

Podvádanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas skúšky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie II., 11. júna 2025

1. (6 bodov) Majme maticu A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Nájdite charakteristický a minimálny polynóm matice A .
b) Nájdite jej vlastné vektory, Jordanov tvar a maticu M z rozkladu $A = MJM^{-1}$.

2. (5 bodov) a) Zistite signatúru matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

v závislosti od parametra $a \in \mathbb{R}$.

b) Nájdite jej LDL^T rozklad (ak existuje). Sú nejaké hodnoty parametra a kedy sa to nedá? Aký bude rozklad na úplné štvorce príslušnej kvadratickej formy $x^T Ax$ v takých prípadoch?

3. (6 bodov) Nech G_k je priestor funkcií tvaru $f(x) = p(x)e^x$, kde $p(x)$ je polynóm stupňa najvyššieho k a e^x je exponenciálna funkcia. Podobne označme ako H_k priestor funkcií tvaru $f(x) = p(x)e^{-x}$; opäť, polynóm $p(x)$ je stupňa najvyššieho k .

- a) Nájdite bázy priestorov G_3 a H_3 , určite dimenzie $G_3 \cap H_3$ a $G_3 + H_3$.
b) Uvažujme zobrazenie $D : G_3 + H_3 \rightarrow G_3 + H_3$ dané predpisom:

$$D(f)(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Nájdite jeho maticu vzhľadom na bázu určenú v časti a), vlastné hodnoty, vlastné vektory a Jordanov tvar.

4. (6 bodov) a) Zdôvodnite prečo by matica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mala spĺňať rovnicu $A^3 + A^2 - A = I$.

- b) Vyjadrite A^{-1} ako lineárnu kombináciu matíc A^2 , A a I (bez jej výpočtu).
c) Ukážte, že pre každé $n \in \mathbb{Z}$ (aj pre záporné) existujú koeficienty α_n , β_n a γ_n , pre ktoré

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I.$$

- d) Ukážte, že pre zložky matice A^n na pozíciách $(1, 1)$, $(2, 2)$, resp. $(3, 3)$ platí

$$(A^n)_{11} = 1, \quad (A^n)_{22} = (-1)^n(1 - n) \quad \text{a} \quad (A^n)_{33} = (-1)^n(n + 1).$$

Odvodte z toho systém troch lineárnych rovníc s trojicou neznámych $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ a ten následne vyriešte.

5. (12 bodov) Pravda/Nepravda. So zdôvodnením (príkladom) v pravdivom prípade a protipríkladom (zdôvodnením) v nepravdivom:

- a) Reálna symetrická matica so zápornými zložkami má reálne záporné vlastné hodnoty.
b) Ak A a B sú regulárne $n \times n$ matice, potom je $(A^T + B)(A + B^T)$ symetrická a kladne definitná.
c) Ak pre $n \times n$ matice A a B platí $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$, potom aj $\chi_{A^2}(\lambda) = \chi_{B^2}(\lambda)$.
d) Ak je U unitárna matica, tak aj $\overline{U}$ (zložky sú komplexne združené) je unitárna.
e) Ak $n \times n$ matica A spĺňa $A^3 = I$ a má iba reálne vlastné hodnoty, potom $A = I$.
f) Pre regulárnu maticu A majú Jordanove tvary J_A a $J_{A^{-1}}$ rovnaký počet blokov.

6. (5 bodov) Predpokladajme, že máme zadaných osem komplexných matíc typu 6×6 , ktorých tretie mocniny sú nulové (t.j. $A_i^3 = 0$ pre $i = 1, \dots, 8$). Ukážte, že potom dve z matíc musia byť podobné.