

1. Použitím definičných vlastností vektorového priestoru ukážte:

- a) Ak pre vektory  $v$  a  $n$  platí  $v + n = v$ , potom  $n = 0$ .  
 b) Ak  $v$  je nenulový vektor a  $c$  nenulový skalár, potom je vektor  $cv$  nenulový.

2. (2.1.2) Ktoré z nasledujúcich podmnožín  $\mathbb{R}^3$  sú podpriestory?

- a) Rovina zložená z vektorov s prvou zložkou  $b_1 = 0$ .  
 b) Rovina zložená z vektorov s  $b_1 = 1$ .  
 c) Množina vektorov  $b$  spĺňajúcich  $b_1 b_2 = 0$  (táto množina bude zjednotením roviny  $b_1 = 0$  a roviny  $b_2 = 0$ ).  
 d) Všetky kombinácie vektorov  $x = (1, 1, 0)$  a  $y = (2, 0, 1)$ .  
 e) Vektory  $(b_1, b_2, b_3)$  spĺňajúce  $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$ .

3. (2.1.4) Aký je najmenší podpriestor matíc typu  $3 \times 3$ , ktorý obsahuje všetky symetrické aj dolné trojuholníkové matice? (Pozn. symetrické matice aj dolné trojuholníkové matice tvoria podpriestory priestoru matíc) Aký je najväčší podpriestor, ktorý je obsiahnutý v oboch týchto podpriestoroch?

4. (2.1.7) Ktoré z nasledujúcich podmnožín  $\mathbb{R}^\infty$  sú podpriestormi?

- a) Všetky postupnosti, ktoré obsahujú nekonečne veľa núl (napr.  $(1, 0, 1, 0, \dots)$ ).  
 b) Všetky postupnosti  $(x_1, x_2, \dots)$ , ktoré sú od istého člena nulové (t.j.  $x_j \neq 0$  iba pre konečne veľa členov).  
 c) Všetky klesajúce postupnosti:  $x_{j+1} \leq x_j$  pre každé  $j$ .  
 d) Všetky konvergentné postupnosti:  $x_j$  majú limitu pre  $j \rightarrow \infty$ .  
 e) Všetky aritmetické postupnosti:  $x_{j+1} - x_j$  je rovnaké pre všetky  $j$ .  
 f) Všetky geometrické postupnosti  $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$ , kde  $k$  a  $x_1$  sú ľubovoľné.

5. (2.2.3) Nájdite  $LU$  rozklad pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozhodnite, ktoré premenné sú voľné a ktoré viazané, nájdite všeobecné riešenie systému  $Ax = 0$ . Aká je hodnota matice  $A$ ?

6. (2.2.6) Vyjadrite všeobecné riešenie systému

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

ako súčet čiastkového riešenia systému  $Ax = b$  a všeobecného riešenia homogénneho systému  $Ax = 0$ .

7. (2.2.10) a) Nájdite všetky riešenia systému

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Ako budú vyzeráť riešenia ak zmeníme pravú stranu z  $(0, 0, 0)$  na  $(a, b, 0)$ ?

8. (2.2.12) Nájdite systém dvoch rovníc o troch neznámych  $Ax = b$ , ktorého všeobecné riešenie má tvar

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Každý stĺpec matice  $AB$  je kombináciou stĺpcov matice  $A$ . To znamená, že *stĺpcový priestor matice  $AB$  je podmnožinou stĺpcového priestoru matice  $A$  (alebo sa mu rovná)*. Uveďte príklad, kde sa stĺpcové priestory matíc  $A$  a  $AB$  nerovnajú.

10. Pravda/nepravda. Zdôvodnite.

- Vektory  $b$ , ktoré nepatria do stĺpcového priestoru  $\mathcal{S}(A)$  tvoria podpriestor.
- Ak  $\mathcal{S}(A)$  obsahuje iba nulový vektor, potom je  $A$  nulová matica.
- Stĺpcový priestor matice  $2A$  je rovnaký ako stĺpcový priestor matice  $A$ .
- Stĺpcový priestor matice  $A - I$  je rovnaký ako stĺpcový priestor matice  $A$ .

11. (2.3.13) Nájdite dimenzie priestorov:

- priestor vektorov v  $\mathbb{R}^4$ , ktorých zložky v súčte dávajú nulu,
- nulový priestor (jadro) identity matice typu  $4 \times 4$ ,
- priestor všetkých matíc typu  $4 \times 4$ ,
- priestor všetkých antisymetrických matíc typu  $4 \times 4$ .

12. Riešte systém lineárnych rovníc  $Ax = b$ , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- a) v obore  $\mathbb{Q}$ ,                      b) v  $\mathbb{Z}_2$ ,                      c) v  $\mathbb{Z}_3$ ,                      d) v  $\mathbb{Z}_7$ .

Aké sú dimenzie stĺpcového (resp. riadkového) priestoru matice  $A$ , keď sa na stĺpce (resp. riadky) pozeráme ako na vektory v  $\mathbb{Q}^3$ ,  $\mathbb{Z}_2^3$ ,  $\mathbb{Z}_3^3$  a v  $\mathbb{Z}_7^3$ ?