

1. (3.6.17) Nájdite faktorizáciu  $A = LDL^T$  a potom tzv. *Choleského* faktory  $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$  pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{bmatrix}.$$

2. (3.R.24, 25) Tomograf (ľudovo "CT-čko", to je to, čo sa predražene nakupuje) sníma pacienta z rôznych smerov röntgenovými lúčmi a potom vyprodukuje obrázok zodpovedajúci matici udávajúcej hustotu kostí a tkanív v každom bode. Z matematického hľadiska ide o zistenie hodnôt zložiek akejsi matice z jej projekcií.

Vieme zrekonštruovať  $2 \times 2$  maticu  $A$ , ak poznáme súčty zložiek v každom jej riadku a stĺpci?

Podobne, vieme v  $3 \times 3$  prípade zrekonštruovať maticu  $A$  ak poznáme súčty zložiek v každom riadku, v každom stĺpci ako aj súčty pozdĺž hlavnej diagonály a susedných dvoch diagonál s ňou rovnobežných?

3. (4.2.15) Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra  $\lambda$  je  $A - \lambda I$  singularná?

4. (4.2.1) Ako súvisia hodnoty determinantov  $\det(2A)$ ,  $\det(-A)$  a  $\det(A^2)$  s hodnotou determinantu  $\det(A)$  pre  $n \times n$  maticu  $A$ ?

5. (4.2.4) Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{a} \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

6. (4.2.5) Koľko výmen riadkov potrebujeme, na to aby sme prešli od matice  $A$  k matici  $I$ :

$$A = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \vdots \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}?$$

Kedy je  $\det A = 1$  a kedy  $\det A = -1$ ? (V príklade 4.2.4 sme mali  $n = 4$  a  $\det A = 1$ )

7. (4.2.10) Použitím riadkových operácií overte, že determinant  $3 \times 3$  Vandermondovej matice je

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

Skúste vypočítať aj pre  $4 \times 4$  matice.

8. (4.2.14) Pre nasledujúce matice nájdite determinanty použitím Gaussovej eliminácie:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

9. (4.2.11) a) Antisymetrická matica spĺňa  $K^T = -K$ , napríklad

$$K \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v  $3 \times 3$  prípade platí  $\det(-K) = (-1)^3 \det K$ . Zároveň  $\det K^T = \det K$  (toto platí vždy). Z toho vyvodte, že taká matica má nulový determinant.

b) Nájdite antisymetrickú  $4 \times 4$  maticu s nenulovým determinantom.

10. (4.2.13) Ak v matici  $A$  je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že  $\det A = 0$ . Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že  $\det(A - I) = 0$ . Nájdite takú maticu  $A$ , pre ktorú z toho nevyplýva, že  $\det A = 1$ .

11. (4.2.17) Predpokladajme, že  $CD = -DC$ . Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame  $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$ , čiže aspoň jedna z matíc  $C$  alebo  $D$  musí mať nulový determinant. Preto rovnosť  $CD = -DC$  môže nastať iba ak  $C$  alebo  $D$  je singulárna.