Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej algebry a geometrie I., 10. november 2022

1. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ n & n+1 & n+2 & n+3 \\ n & n & n & n \end{bmatrix}$$

a) nájdite dimenziu a bázy jej nulového priestoru $\mathcal{N}(A)$ a stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$,
b) nájdite rovnicu/e, ktorú/é musia spĺňať zložky vektora $b \in \mathcal{S}(A)$,
c) pre (každé) $b \in \mathcal{S}(A)$ nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$ (ak existuje).

2. Pre vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ uvažujme $n \times n$ maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{n-1} & v_n \end{bmatrix}.$$

a) Rozhodnite ako bude vyzerať stĺpcový priestor $\mathcal{S}(A)$ v závislosti od v. Kedy je A invertibilná?
b) V regulárnom prípade nájdite inverznú maticu A^{-1}.

3. Nech $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ je pevne daná matica a

$$W_A = \{B \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \mid \mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)\}.$$

a) Ukážte, že W_A tvorí vektorový podpriestor v $M_{n,m}(\mathbb{R})$.
b) Čo sa dá povedať o súčinoch AB, resp. BA pre $B \in W_A$?
c) Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite W_A, jeho dimenziu a bázu.

4. Nech $M_{3,3}$ je vektorový priestor matíc typu 3×3, $UP_{3,3}$ je množina horných trojuholníkových matíc typu 3×3 a $SUP_{3,3}$ je množina striktne horných trojuholníkových matíc typu 3×3, t.j. sú to horné trojuholníkové matice s nulovou diagonálou.
a) Ukážte, že $UP_{3,3}$ a $SUP_{3,3}$ sú vektorové podpriestory priestoru $M_{3,3}$.
b) Nájdite bázy $UP_{3,3}$ a $SUP_{3,3}$.
c) Majme zobrazenie $\phi : UP_{3,3} \to SUP_{3,3}$, dané nasledujúcim predpisom:

$$\phi : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & a_{11}+a_{22} & a_{12}+a_{23} \\ 0 & 0 & a_{22}+a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že ϕ je lineárne zobrazenie a nájdite jeho maticu vzhľadom na bázy z časti b).
d) Nájdite *jadro* zobrazenia ϕ - t.j. tie matice v $UP_{3,3}$, ktoré sa zobrazia do nulovej matice (nulový vektor v $SUP_{3,3}$). Aká je jeho dimenzia?
e) Nájdite *obraz* zobrazenia ϕ. Aká je jeho dimenzia?

5. (Pravda/Nepravda) So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom.
a) Polynómy $p(x) = (x-1)^2$, $q(x) = x^2$ a $r(x) = (x+1)^2$ tvoria bázu priestoru $\mathcal{P}_2$.
b) Nech $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineárna transformácia, $\alpha([1,0]^T) = [4,-5]^T$ a $\alpha([-1,1]^T) = [-3,7]^T$. Potom $\alpha([-6,8]^T) = [-16,56]^T$.
c) Ak je pre štvorcovú maticu A matica AA^T invertibilná, tak aj A je invertibilná.