

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry I., 15. december 2022

1. Nech L_1 a L_2 sú podpriestory \mathbb{R}^4 dané ako:

$$L_1 = \text{span}[(1, 2, 0, 1)^T, (2, 1, 1, 1)^T], \quad L_2 = \text{span}[(1, 1, 1, 1)^T, (2, 1, 3, 1)^T].$$

- Nájdite ortonormálne bázy podpriestorov L_1^\perp a L_2^\perp .
 - Nájdite matice P_1 a P_2 kolmých projekcií na podpriestory L_1 a L_2 .
 - Nájdite dimenziu a bázu prieniku $L_3 = L_1 \cap L_2$.
2. Nech $\mathcal{P}_5[t]$ je vektorový priestor polynómov premennej t stupňa nanajvyš 5 s reálnymi koeficientami.
- Ukážte, že $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3, (t-1)^4, (t-1)^5\}$ je bázou $\mathcal{P}_5[t]$, označme \mathcal{B}_5 .
 - Ukážte, že zobrazenie $\pi : \mathcal{P}_5[t] \rightarrow \mathcal{P}_5[t]$ dané predpisom $\pi : p(t) \mapsto p(t) - p(1)$ je lineárne a nájdite jeho jadro.
 - Ukážte, že zobrazenie π je projekcia, t.j. spĺňa $\pi \circ \pi = \pi$.
 - Nájdite maticu zobrazenia π vzhľadom na bázu \mathcal{B}_5 .

3. Nech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

- Nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$.
 - Nájdite také riešenie x_r systému $Ax = b$, ktoré patrí do riadkového priestoru matice A .
 - Ukážte, že pre každé $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T \in \mathcal{S}(A)$ existuje práve jeden vektor $x_r \in \mathcal{S}(A^T)$, ktorý spĺňa $Ax_r = b$. Nájdite predpis pre také x_r .
4. Nech x, y, z sú nejaké vektory vo vektorovom priestore V so skalárnym súčinom a α a β sú reálne koeficienty. Ukážte, že platí nasledujúca nerovnosť a rozhodnite, kedy v nej nastáva rovnosť.

$$|\langle \alpha x + \beta y, z \rangle| \leq (|\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\|) \|z\|.$$

5. Nájdite determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

a zistite pre aké hodnoty parametra a je regulárna.