Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie I., 11. január 2023

1. *(5 bodov)* Nech V je podpriestor $\mathbb{R}^4$ generovaný vektormi $(1,0,0,-1)^T$, $(1,-1,0,0)^T$, $(0,-1,1,0)^T$ a $(0,0,1,-1)^T$ a $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

a) Nájdite dimezie a ortonormálne bázy priestorov U a V.

b) Nájdite dimenzie a bázy priestorov $U+V$ a $U \cap V$.

c) Nájdite maticu kolmej projekcie do priestoru V.

2. *(4 body)* Predpokladajme, že A je antisymetrická matica typu $n \times n$. Ukážte, že matica $I + A$ je regulárna.

Návod: Aký je uhol medzi vektormi Ax a x pre $x \in \mathbb{R}^n$?

3. *(6 bodov)* Prvok v priestore polynómov $\mathcal{P}_3$ sa dá zapísať ako $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pre reálne čísla a, b, c a d. Na $\mathcal{P}_3$ definujme súčin

$$(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3). \qquad (*)$$

a) Ukážte, že $(\ ,\ )$ tvorí skalárny súčin na $\mathcal{P}_3$.

b) Nech $q_1(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, $q_2(x) = x(x-2)(x-3)$, $q_3(x) = x(x-1)(x-3)$ a $q_4(x) = x(x-1)(x-2)$. Ukážte, že $\mathcal{B} = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$ tvoria ortogonálnu bázu priestoru $\mathcal{P}_3$.

c) Pre funkciu $f(x) = x^2$ nájdite projekcie na $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$ a $q_4(x)$ a vyjadrite x^2 ako kombináciu $x^2 = c_1q_1(x) + c_2q_2(x) + c_3q_3(x) + c_4q_4(x)$.

d) Pomocu vzorca (*) môžeme definovať súčin aj na priestore $C(\mathbb{R})$ (spojité funkcie na $\mathbb{R}$). Prečo to nebude skalárny súčin na tomto priestore? Pre $f \in C(\mathbb{R})$ definujme

$$f_p = c_1q_1(x) + c_2q_2(x) + c_3q_3(x) + c_4q_4(x), \qquad \text{kde} \qquad c_i = \frac{(f,q_i)}{(q_i,q_i)}.$$

Ukážte, že f_p bude polynóm, ktorý spĺňa $f_p(0) = f(0)$, $f_p(1) = f(1)$, $f_p(2) = f(2)$ a $f_p(3) = f(3)$.

e) Týmto sme skonštruovali aproximáciu funkcie f polynómom, ktorý má rovnaké hodnoty ako f v bodoch $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ a $x = 3$. Ako by bolo treba postupovať aby sme našli polynomiálnu aproximáciu zhodujúcu sa s f v bodoch $a_1, a_2, \dots, a_n$?

4. *(5 bodov)* a) Nech A je $m \times n$ matica a $\dim \mathcal{S}(A) = r$. Ukážte, že r je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré existujú matice $B \in M_{m,r}$, $C \in M_{r,n}$ také, že $A = BC$.

b) Ukážte, že $r \times r$ matice B^TB a CC^T sú regulárne.

c) Použitím rovnosti $(BC)^T = C^TB^T$ nájdite alternatívny dôkaz, že aj $\dim \mathcal{S}(A^T) = r$.

5. *(15 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom:

a) Ak je štvorcová $n \times n$ matica A invertibilná a v matici B je k-ty riadok k-násobkom k-teho riadku matice A (pre $k = 1, \dots, n$), potom je aj matica B invertibilná.

b) Ak regulárna $n \times n$ matica A spĺňa $A^3 = A$, potom $A = I$.

c) Ak pre $v_1, v_2, v_3 \in V$ platí, že $v_1 \notin \operatorname{span}(v_2, v_3)$, $v_2 \notin \operatorname{span}(v_1, v_3)$ a $v_3 \notin \operatorname{span}(v_1, v_2)$, potom sú v_1, v_2 a v_3 lineárne nezávislé.

d) Množina riešení nerovnice $\det(B) < 0$ pre $B \in M_{n,n}$ je uzavretá vzhľadom na sčítanie matíc.

e) Ak pre $m \times n$ maticu A a $n \times k$ maticu B platí $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$, potom $\mathcal{S}(A^T) \subseteq \mathcal{N}(B^T)$.

f) V priestore polynómov $\mathcal{P}(x)$ je lineárne zobrazenie dané predpisom $\alpha : p(x) \mapsto p(x-1)$ lineárne.

6. *(5 bodov)* Pre $n \times n$ maticu

$$A_n = \begin{bmatrix} b & c & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

nájdite vyjadrenie $\det A_n$ pomocou $\det A_{n-1}$, $\det A_{n-2}$ a $\det A_{n-3}$. Následne nájdite hodnotu $\det A_n$ v závislosti od n pre voľbu $a = b = c = d = 1$.