

Lineárna algebra

leto 2023

3. cvičenie

- Pre danú množinu ‘vektorov’ s operáciou sčítania a skalárneho násobenia zistite, či tvorí vektorový priestor a ak áno, dokážte, že je vektorovým priestorom.

1. množina všetkých riešení homogénneho systému lineárnych rovníc so sčítaním a násobením skalárom definovanými po súradniciach
2. množina všetkých vektorov ortogonálnych k danej množine vektorov so sčítaním a násobením skalárom definovanými po súradniciach
3. množina všetkých $m \times n$ matíc s reálnymi koeficientami a so sčítaním matíc a násobením skalárom ako sme ho definovali na prednáške
4. množina komplexných čísel s operáciou sčítania komplexných čísel a násobenia reálnym číslom

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \cdot (a + bi) = \alpha a + \alpha b i$$

5. $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \rangle = \{ \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

lineárny obal vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$

6. množina všetkých (aj konštantných) polynómov s reálnymi koeficientami s operáciou sčítania polynómov a násobenia polynómov reálnym číslom
7. množina všetkých funkcií $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so sčítaním po zložkách a násobením reálnymi číslami definovaným po zložkách:

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} : \quad f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad c \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}$$

$$(c \cdot f)(x) = cf(x), \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}$$

- 8.

$$\{ \vec{u} \mid \vec{u} \in \mathbb{R}^n \text{ a } u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0 \}$$

9. Zdôvodnite, prečo množina riešení nehomogénneho systému nikdy nie je vektorovým priestorom.

- **Food for Thought** (toto je skôr na premyslenie doma)

1. Uvažujme systém dvoch rovníc o dvoch neznámych nad \mathbb{R} , ktorý má parametrické riešenie obsahujúce jeden parameter. Predstavte si, že Vám niekto odovzdá takéto riešenie. Navrhните ‘skúšku správnosti’, t.j., postup, ako by ste si overili, že je to riešenie určite správne a úplné? Stačí overiť konečne veľa riešení a ak áno, koľko riešení je potrebné overiť?
2. Uvažujme systém dvoch rovníc o troch neznámych nad \mathbb{R} , ktorý má parametrické riešenie obsahujúce jeden parameter. Predstavte si, že Vám niekto odovzdá takéto riešenie. Navrhните ‘skúšku správnosti’, t.j., postup, ako by ste si overili, že je to riešenie určite správne a úplné? Stačí overiť konečne veľa riešení a ak áno, koľko riešení je potrebné overiť? Je nejaký rozdiel medzi touto a predchádzajúcou otázkou?
3. Uvažujme systém dvoch rovníc o troch neznámych nad \mathbb{R} , ktorý má parametrické riešenie obsahujúce dva parametre. Predstavte si, že Vám niekto odovzdá takéto riešenie. Navrhните ‘skúšku správnosti’, t.j., postup, ako by ste si overili, že je to riešenie určite správne a úplné? Stačí overiť konečne veľa riešení a ak áno, koľko riešení je potrebné overiť?
4. Môže mať systém, v ktorom sa všetky prave strany rovnajú nule, prázdnu množinu riešení?