Lineárna algebra
leto 2023
4. cvičenie

1. Nájdite **všetky** podpriestory priestoru $\mathbb{Z}_2^2$.
2. O koľko ťažšie by bolo nájsť všetky podpriestory priestoru $\mathbb{Z}_2^3$?

   Keby ste museli napísať program, ktorý by našiel všetky podpriestory priestoru $\mathbb{Z}_2^n$, ako by vyzeral a aká by bola jeho výpočtová zložitosť?
3. Vyriešte nasledujúci systém nad $\mathbb{Z}_2$. Napíšte jeho riešenie parametricky a vypíšte aj všetky riešenia ako zoznam.
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array}$$
4. Nech $\vec{u}_1 = (1,1,0,0)$ a $\vec{u}_2 = (0,1,1,0)$. Nájdite všetky vektory priestoru $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$.
5. Popíšte lineárny obal $\left\langle 2+2x^2, x+x^3 \right\rangle \le \mathbb{R}[x]$.

   $\left\langle 2+2x^2, x+x^3 \right\rangle = \{a(2+2x^2)+b(x+x^3) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{2a+bx+2ax^2+bx^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, čo je množina polynómov stupňa 3 (alebo stupňa 2, ak $b=0$; alebo stupňa 0 ak $a=b=0$), v ktorých sa absolútny koeficient rovná koeficientu pri x^2 a koeficient pri x sa rovná koeficientu pri x^3;

   takže napr. $-5x-5x^3$ alebo $-5-5x^2$ alebo $-5+5x-5x^2+5x^3$ patria do lineárneho obalu, ale $-5+5x-5x^2-5x^3$ tam nepatrí.
6. Zdôvodnite $\mathbb{R}^n = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$; t.j., vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ generujú priestor $\mathbb{R}^n$
7. Zdôvodnite, že žiadna *vlastná* podmnožina množiny $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ negeneruje priestor $\mathbb{R}^n$.
8. Ukážte $\langle (1,2,3,4), (4,3,2,1) \rangle = \langle (1,1,1,1), (-3,-1,1,3) \rangle$
9. Ukážte $\langle (1,2), (2,4) \rangle \neq \mathbb{R}^2$
10. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ su lineárne nezávislé
11. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1), (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ su lineárne nezávislé
12. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (1,1,1), (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ su lineárne závislé
13. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1), (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ su lineárne závislé
14. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1), (1,1,1), (1,0,1), \in \mathbb{R}^3$ generujú $\mathbb{R}^3$, ale nie sú lineárne nezávislé
15. Nech $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5 \in \mathbb{R}^4$, pričom vieme, že $\vec{u}_5 \notin \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \rangle$. Zdôvodnite, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ musia byť lineárne závislé.
16. Nech $\vec{u}_1 = (1,2,3,4)$, $\vec{u}_2 = (4,3,2,1)$. Nájdite vektory $\vec{u}_3, \vec{u}_4$ tak, aby vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ tvorili bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$.