Lineárna algebra
leto 2023
5. cvičenia

1. Nech $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$. Môžu vektory $\vec{u}, \alpha\vec{u}, \vec{v}$ generovať $\mathbb{R}^3$ pre nejaké $\alpha \in \mathbb{R}^3$?
2. Je priestor všetkých polynómov $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s vlastnosťou $p(0) = 0$ konečne generovaný?
3. Rozhodnite, či vektory $(1,2,3,4), (4,3,2,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1)$ tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$.
4. Nájdite aspoň tri rôzne bázy priestoru $\langle(-1,2,0,3), (2,-1,1,0), (-1,1,-1,1)\rangle$.
5. Nech $\vec{u}_1 = (1,2,3,4)$, $\vec{u}_2 = (4,3,2,1)$. Je možné vybrať z množiny vektorov
$$(1,0,0,0), (1,1,0,0,), (0,0,0,1), (1,1,1,0), (0,0,1,1)$$
niektoré tak, aby vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ spolu s vybranými vektormi tvorili bázu priestoru $\mathbb{R}^4$?
6. Vyriešte cvičenia $3, 4, 5$ a 9 na str. 88 v Korbašových skriptách.
7. Určte dimenziu priestoru $\langle(1,1,-1,-1), (1,0,-1,0), (1,1,1,1), (1,1,0,0), (0,0,1,1)\rangle$.
8. Nájdite koordináty vektora $(1,2,3,4)$ vzhľadom na bázu $(1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Hľadáte reálne čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, pre ktoré platí
$$(1,2,3,4) = \alpha_1(1,1,1,0) + \alpha_2(1,1,0,1) + \alpha_3(1,0,1,1) + \alpha_4(0,1,1,1)$$
9. Dokážte, že ak $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ je báza vektorového priestoru $\mathbb{R}^k$, koordináty vektora $\vec{v}_1$ vzhľadom na túto bázu sú $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$, koordináty vektora $\vec{v}_2$ vzhľadom na túto bázu sú $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k]$, tak koordináty vektora $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ vzhľadom na túto bázu sú $[\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_k + \beta_k]$.
10. Nech vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^k$ a vektor $\vec{v}$ má vzhľadom na túto bázu koordináty $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$. Aké koordináty má vektor $\vec{v}$ vzhľadom na bázu $2\vec{u}_1, 2\vec{u}_2, \ldots, 2\vec{u}_k$?
11. Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} + \mathbb{W}$, ak $\mathbb{V} = \langle(1,1,0,0), (0,0,1,1)\rangle$ a $\mathbb{W} = \langle(1,0,1,0), (0,1,0,1)\rangle$.
12. Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} + \mathbb{W}$, ak $\mathbb{V} = \langle(1,1,0,0), (0,0,1,1)\rangle$ a $\mathbb{W} = \langle(1,1,1,1), (0,1,0,1)\rangle$.
13. Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} + \mathbb{W}$, ak $\mathbb{V} = \langle(1,1,0,0), (0,0,1,1)\rangle$ a $\mathbb{W} = \langle(1,1,1,1), (2,2,1,1)\rangle$.
14. Nech $\dim \mathbb{U} = 3$ a $\dim \mathbb{V} = 2$. Určte dimenziu priameho súčtu $\mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.
15. Nech $\dim(\mathbb{U} + \mathbb{V}) = 4$, $\dim \mathbb{U} = 3$ a $\dim \mathbb{V} = 2$. Určte $\dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{V})$.
16. Nech $\dim \mathbb{U} = 3$ a $\dim \mathbb{V} = 2$. Môže byť $\dim(\mathbb{U} + \mathbb{V}) = 6$?
17. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   - Určte dimenziu priestoru $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$.
   - Nájdite redukovanú stupňovitú maticu riadkovo ekvivalentnú k matici $\mathbf{A}$.
   - Rozhodnite, či sú matice $\mathbf{A}$ a
   $$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   riadkovo ekvivalentné.
18. Popíšte všetky matice, ktoré sú riadkovo ekvivalentné jednotkovej matici $\mathbb{I}_n$.
19. Je pravda, že dve $m \times n$ matice sú riadkovo ekvivalentné vtedy a len vtedy, keď sa rovnajú ich hodnosti?
20. Popíšte všetky matice, ktoré sú riadkovo ekvivalentné matici $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Food for Thought:

1. ak $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$, tak **Hammingova vzdialenosť** medzi vektormi $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je počet pozícií, v ktorých sa líšia; oznacujeme ju $d(\vec{u}, \vec{v})$

   Napr., $d((1,1,1,0),(1,0,1,0)) = 1$, $d((1,1,1,0),(1,0,1,1)) = 2$, a $d((1,1,1,0),(0,0,0,0)) = 3$.

2. **váha vektora** $\vec{u} \in \mathbb{Z}_2^n$ je počet nenulových pozícií v $\vec{u}$; oznacujeme ju $w(\vec{u})$

   Napr., $w((1,1,1,0)) = 3, w(1,0,1,0)) = 2, w((0,0,0,0)) = 0$.

3. Platia vety:

   - Ak $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$, tak $d(\vec{u}, \vec{v}) \leq n$
   - Ak $\vec{u} \neq \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$, tak $d(\vec{u}, \vec{v}) \geq 1$

4. Nech $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$. **Minimálna vzdialenosť** v kóde $\mathcal{C}$, $d(\mathcal{C})$, je najmenšia vzdialenosť medzi akýmikoľvek dvoma rôznymi vektormi z $\mathcal{C}$:
$$d(\mathcal{C}) = \min\{d(\vec{u}, \vec{v}) \mid \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{C}, \vec{u} \neq \vec{v}\}$$

5. **Veta:** Ak $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ je lineárny kód, tak
$$d(\mathcal{C}) = \min\{w(\vec{u}) \mid \vec{0} \neq \vec{u} \in \mathcal{C}\}$$

6. Nech $\mathcal{C} = \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0) \rangle$. Určte dimenziu priestoru $\mathcal{C}$, počet vektorov v $\mathcal{C}$ a $d(\mathcal{C})$. Aká je váha najľahšieho nenulového vektora v $\mathcal{C}$? Aká je váha najťažšieho nenulového vektora v $\mathcal{C}$?