Lineárna algebra
1-DAV-104/20
Leto 2023
6. cvičenia

1. Upravte dané matice na redukovaný stupňovitý tvar a určite ich hodnosti.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vyriešte cvičenia z Korbaša: str. 119 / 1, 2, 4, 5, 6, 7; str. 135 / 1, 2, 3; str. 136 / 4.
3. Ktoré z nasledujúcich zobrazení sú lineárne transformácie?
   (a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f_1(x, y) = (x + y, y)$;
   (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f_2(x, y) = (x + 1, y + 2)$;
   (c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f_3(x, y) = (x^2, y^2)$;
   (d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f_4(x, y) = 3x + y$;
   (e) $f_5 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$; $f_5(p(x)) = p(1)$;
   (f) $f_6 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$; $f_6(p(x)) = (1, p(0))$;
4. Nech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je definované predpisom
$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, -2x_3, x_1 + x_2, x_2)$$
   - Rozhodnite, či je zobrazenie f lineárnou transformáciou.
   - Nájdite riadkovú aj stĺpcovú matice zobrazenia f vzhľadom na jednotkovú bázu.
   - Určte dimenziu jadra zobrazenia f.
   - Určte dimenziu obrazu zobrazenia f.
   - Rozhodnite, či je zobrazenie f injekcia, surjekcia alebo bijekcia.
5. Nech $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je definované predpisom
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, -2x_3, x_1 + x_2 + x_4)$$
   - Rozhodnite, či je zobrazenie f lineárnou transformáciou.
   - Nájdite riadkovú aj stĺpcovú matice zobrazenia f vzhľadom na jednotkovú bázu.
   - Určte dimenziu jadra zobrazenia f.
   - Určte dimenziu obrazu zobrazenia f.
   - Rozhodnite, či je zobrazenie f injekcia, surjekcia alebo bijekcia.
6. Nech $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definované predpisom
$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, -2x_3, x_1 + x_2)$$
   - Rozhodnite, či je zobrazenie f lineárnou transformáciou.
   - Nájdite riadkovú aj stĺpcovú matice zobrazenia f vzhľadom na jednotkovú bázu.
   - Určte dimenziu jadra zobrazenia f.
   - Určte dimenziu obrazu zobrazenia f.
   - Rozhodnite, či je zobrazenie f injekcia, surjekcia alebo bijekcia.

Food for Thought:

1. Nech $f : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ je akékoľvek zobrazenie (t.j., nemusí sa jednať o lineárnu transformáciu). Jadro zobrazenia f sa dá zadefinovať aj v tomto prípade ako množina $Ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$.
   - Platí naďalej tvrdenie, že f je injekcia vtedy a len vtedy, keď $Ker(f) = \{\vec{0}\}$?
   - Platí aspoň jedna z tých dvoch implikácií?
   - Viete nájsť nejakú rozumnú netriviálnu podmienku tak, aby f bolo injekciou vtedy a len vtedy, keď je táto podmienka pre f splnená?
2. Nech $\mathbb{A}$ je matica obsahujúca len nuly a jednotky. Musí sa hodnosť matice $\mathbb{A}$ nad poľom $\mathbb{R}$ rovnať hodnosti matice $\mathbb{A}$ nad poľom $\mathbb{Z}_2$?