Vzorová priebežná písomka I.
Lineárna Algebra
2019

Príklady čítajte pozorne a riešenia napíšte v požadovanom tvare.
Ak príklad žiada dôkaz, uveďte dôkaz. Ak príklad žiada nejaké konkrétne objekty, uveďte konkrétne objekty.
Dôkazy musia byť čo najúplnejšie a hodnotí sa kvalita a úroveň argumentov.
Riešenia numerických úloh zakrúžkujte. **Ak sa Vaše riešenie nezmestí do predpísaného priestoru, použite zadné strany písomky a jasne označte, kde Vaše riešenie pokračuje.**

1. Vyriešte nasledujúce systémy rovníc, t.j., rozhodnite, či majú riešenie a ak majú riešenie, tak rozhodnite, či práve jedno alebo nekonečne veľa. Ak majú práve jedno riešenie, nájdite ho. Ak majú nekonečne veľa riešení, **uveďte parametrické riešenie alebo v tvare podpriestorov a generátorov**.

   a) Nájdite riešenie nasledujúceho systému nad $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & + & 3x_4 & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \end{array}$$

   b) Nájdite riešenie nasledujúceho systému nad $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & + & 3x_4 & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \end{array}$$

   c) Nájdite riešenie nasledujúceho systému nad $\mathbb{C}$ (odpoveď zadajte v tvare, ktorý neobsahuje zlomky obsahujúce imaginárnu jednotku i v menovateli).

$$\begin{array}{ccccc} ix_1 & - & ix_2 & = & 2-i \\ (1+i)x_1 & + & ix_2 & = & i \end{array}$$

2. Rozhodnite, či množina vektorov

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ a aspoň dve z čísel } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ sú nuly}\}$$

   tvorí vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^4$. Svoje rozhodnutie dokážte, pričom využijete kritérium na vektorové podpriestory z prednášky.

3. Dokážte nasledujúce tvrdenie:

   Priestor $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \rangle$ sa rovná priestoru $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ vtedy a len vtedy, keď každý z vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ a každý z vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$.

4. Vypočítajte nasledujúce výrazy nad $\mathbb{R}$:

   a) $(1, -2, 3, -4, 0) \cdot (0, \sqrt{2}, 3, -1, 2) =$

   b) $\sqrt{2}(1, -2, 3, -4) - 2(2, 3, -1, 2) + 5(1, 2, 1, 2) =$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$

   d) $(1, -1, 0, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$

5. Rozhodnite, či platí:
$$\langle (1,2), (-4,1) \rangle = \mathbb{R}^2$$
Svoju odpoveď dôkladne zdôvodnite.

6. Nech $\vec{u} = (1,2,2,1,0)$, $\vec{v} = (1,3,3,2,3)$, $\vec{w} = (2,2,2,2,0)$.

   a) Nájdite vektor, ktorý patrí do lineárneho obalu $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Svoj výber zdôvodnite.

   b) Nájdite vektor, ktorý nepatrí do lineárneho obalu $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Svoj výber zdôvodnite.

   c) Rozhodnite, či vektor $(1,2,3,4,5)$ patrí do lineárneho obalu $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Svoju odpoveď zdôvodnite.

7. Nech $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1)$ je pole. Dokážte, že
$$(-y) \cdot x = -(y \cdot x) = y \cdot (-x),$$
pre všetky $x, y \in \mathbb{F}$.

   Svoj dôkaz podrobne vysvetlite a zdôvodnite.

8. Dokážte nasledujúce tvrdenie:

   Nech $\mathbf{A}$ je $m \times n$ matica nad $\mathbb{R}$ a $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Potom
$$\left(\vec{u} \cdot \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A} \cdot \vec{u}^T$$

9. a) Dokážte, že podmnožina horných trojuholníkových matíc priestoru $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tvorí vektorový podpriestor. Horná trojuholníková matica rozmerov 2×2 je ľubovoľná matica s vlastnosťou $a_{2,1} = 0$.

   b) Určte dimenziu priestoru horných trojuholníkových matíc v $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ a zadajte aspoň jednu bázu tohto priestoru.

10. Rozhodnite, či sú vektory $[1,-1,1,-1], [0,1,0,2], [1,0,2,0] \in \mathbb{R}^4$ lineárne nezávislé. Zdôvodnite svoju odpoveď (trebárs aj primeraným výpočtom, ale vysvetlite, čo robíte a čo to znamená).

11. Je možné vylúčením jedného alebo viacerých vektorov z množiny
$$\{[1,0,0,0], [1,1,0,0], [1,1,1,1], [2,1,1,1], [2,2,1,1], [2,1,0,0]\}$$
vytvoriť bázu priestoru $\mathbb{R}^4$? Zdôvodnite svoju odpoveď.

12. Vyberte z množiny $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\} \subset \mathbb{R}^4$ vektor, ktorý doplní množinu $\{[1,1,1,0], [1,0,1,1], [1,1,0,1]\}$ na bázu priestoru $\mathbb{R}^4$. Zdôvodnite svoju odpoveď.

13. Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} = \langle [1,-1,2,-2], [1,1,0,0], [0,0,1,1], [1,1,1,1] \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Zdôvodnite svoju odpoveď.

14. Rozhodnite, či je pravdivé tvrdenie:

   Nech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$ sú nenulové vektory z vektorového priestoru $\mathbb{V}$. Ak je vektor $\vec{v}_{n+1}$ lineárnou kombináciou vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, tak existuje $1 \leq i \leq n$ také, že vektor $\vec{v}_i$ lineárnou kombináciou vektorov $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}$.

   Ak sa rozhodnete, že tvrdenie platí, dokážte ho. Ak sa rozhodnete, že neplatí, uveďte protipríklad a vysvetlite.

15. Nech $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \in \mathbb{R}^5$ a $\mathbb{V} = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \rangle$. Určte **všetky** možné dimenzie priestoru $\mathbb{V}$, ak viete, že jednotkové vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{V}$, ale jednotkový vektor $\vec{e}_5 \notin \mathbb{V}$. Svoje odpovede zdôvodnite.

16. Nech $\mathbb{V} = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,1,1) \rangle$ a $\mathbb{W} = \langle (1,1,1,0), (0,1,1,1), (0,1,1,0) \rangle$.

   a) Rozhodnite, či $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}$, $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$, $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ alebo nenastáva ani jedna z týchto možností. Svoje rozhodnutie zdôvodnite.

b) Určte dimenzie priestorov $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ a $\mathbb{V} + \mathbb{W}$.

17. Koľko vektorov existuje vo vektorovom priestore $\mathbb{Z}_3^3$, ktoré nie sú lineárnou kombináciou vektorov $[1, 0, 1]$ a $[1, 1, 1]$? Svoju odpoveď zdôvodnite.

    Skúste začať od toho, že určíte, koľko vektorov *je* lineárnou kombináciou vektorov $[1, 0, 1]$ a $[1, 1, 1]$.

18. Dokážte nasledujúce tvrdenie:

    Nech $\mathbb{V}$ *je* n*-rozmerný vektorový priestor a* $\mathbb{U}, \mathbb{W}$ *sú podpriestory priestoru* $\mathbb{V}$. *Ak* $dim(\mathbb{U}) + dim(\mathbb{W}) > n$, *tak* $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ *nie je priamy súčet vektorových priestorov.*

    Návod: Skúste použiť Grassmannovu vetu.

19. Nájdite systém lineárnych rovníc nad $\mathbb{R}$, ktorého množina riešení je 3-rozmerný podpriestor priestoru $\mathbb{R}^5$. Zdôvodnite správnosť svojej odpovede.