

Priebežná písomka II.
Lineárna Algebra
1-DAV-104/20

27. 4. 2022

Meno: _____

1. (5 bodov) Rozhodnite, či môžu byť dve $m \times n$ matice, ktoré majú rôzne hodnoty, riadkovo ekvivalentné. Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

2. (5 bodov) Rozhodnite, či platí, že stopa súčinu matíc je súčinom ich stôp:

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) \cdot \text{tr}(\mathbf{B})$$

Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

3. (5 bodov) Vypočítajte charakteristický polynóm matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. (5 bodov) Určte veľkosť podgrupy $\langle 3 \rangle$ v grupe $\mathbb{Z}_{16}^\#$.

5. (5 bodov) Určte rád permutácie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

v grupe \mathbb{S}_7 .

6. (6 bodov)

Určte index podgrupy K pozostávajúcej z horných trojuholníkových matíc v grupe $GL(2, 2)$. Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

7. (5 bodov) Vynásobte matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nad \mathbb{R} .

8. (5 bodov)

Vynásobte permutácie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

9. (7 bodov) Nájdite inverzný prvok k prvku 30 v grupe $\mathbb{Z}_{101}^\#$.

10. (5 bodov) Vyriešte rovnicu

$$30x \equiv 12 \pmod{101}.$$

11. (5 bodov) Vyriešte rovnicu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. (7 bodov) Nájdite inverznú maticu k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

nad poľom \mathbb{Z}_5 .

13. (5 bodov) Rozhodnite, či tvorí množina $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ podgrupu grupy \mathbb{Z}_{12} . Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

14. (5 bodov) Nájdite ľavú triedu podgrupy $\langle 2 \rangle$ grupy $\mathbb{Z}_{15}^\#$ rôznu od triedy $\langle 2 \rangle$.

15. (5 bodov) Zdôvodnite tvrdenie (môžete sa odvolať na relevantné vety z prednášky):

Lineárna transformácia $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ je injekciou vtedy a len vtedy, keď sa dimenzia jadra zobrazenia ψ rovná 0.

16. (10 bodov) Nech $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je lineárna transformácia definovaná predpisom

$$\varphi(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z, -x + y + z).$$

Rozhodnite, či je zobrazenie φ injekciou, surjekciou alebo bijekciou.

17. (10 bodov)

a) Vypočítajte charakteristický polynóm matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

nad poľom \mathbb{Z}_5 .

b) Nájdite vlastné hodnoty matice \mathbb{A} nad poľom \mathbb{Z}_5 .

c) Nájdite vlastné vektory matice \mathbb{A} nad poľom \mathbb{Z}_5 .