Záverečná písomka
Lineárna Algebra, DAV

20-05-22 Meno: ______________________

Príklady čítajte pozorne a riešenia napíšte v požadovanej forme.
Ak príklad žiada dôkaz, uveďte dôkaz. **Na tejto písomke sa hodnotí kvalita dôkazov - nestačí len 'niečo napísať'.**
Ak príklad žiada nejaké konkrétne objekty, uveďte konkrétne objekty. Hodnotia sa aj neúplné riešenia. Ak neviete príklad úplne vyriešiť, uveďte relevantné fakty súvisiace s riešením problému.

1. (15 bodov) Dimenzia priestoru riešení nad reálnymi číslami.

   Uvažujte homogénny systém n lineárnych rovníc o m neznámych s reálnymi koeficientami. Aké dimenzie môže nadobúdať priestor riešení tohto systému?

   Stručne zdôvodnite svoje tvrdenia.

2. (5 bodov) Dĺžka vektora.

   Určte dĺžku vektora $(a \cdot \cos \frac{\pi}{3}, a \cdot \sin \frac{\pi}{3}, a \cdot \sqrt{8})$

3. (5 bodov) Uhol zvieraný dvoma vektormi.

   Určte uhol zvieraný vektormi $(1, 1, -1)$ a $(3, 3, 0)$.

4. (5 bodov) Podiel komplexných čísel.

   Vypočítajte podiel $\frac{1+3i}{2-3i}$ a odpoveď zadajte v tvare $a + bi$.

5. (10 bodov) Rozhodnite, či sú vektory

$$(1,2,3,4,5),(5,4,3,2,-1),(1,-1,2,-2,0),(-3,2,4,-7) \in \mathbb{R}^4$$

lineárne nezávislé. Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

6. (15 bodov) Ortogonálna matica.

Rozhodnite, či nad $\mathbb{R}$ platí, že súčin ortogonálnej matice samej so sebou je nevyhnutne jednotková matica. Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

7. (10 bodov) Počet podobných matíc.

Určte počet matíc z množiny $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ podobných matici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

8. (15 bodov) Určte počet surjektívnych lineárnych transformácií z priestoru $\mathbb{Z}_2^2$ do priestoru $\mathbb{Z}_2^2$.

   Podrobne zdôvodnite svoju odpoveď (každé tvrdenie musí byť zdôvodnené).

9. (15 bodov) Nájdite ortonormálnu bázu priestoru riešení nasledujúceho homogénneho systému rovníc nad $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

10. (15 bodov) Dokážte nasledujúce tvrdenie:

    Nech $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *je lineárna transformácia.*

    Ak $\dim \mathbb{U} < \infty$, *tak* $\dim Im\varphi = \dim \mathbb{U} - \dim Ker\varphi$.

11. (15 bodov) Nech $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ a $\mathcal{S} \subseteq GL(4, \mathbb{R})$ je množina všetkých matíc $\mathbf{B} \in GL(4, \mathbb{R})$ s vlastnosťou $\mathbf{B}\vec{u}^T = \pm\vec{u}^T$. Rozhodnite, či je množina $\mathcal{S}$ podgrupou grupy $GL(4, \mathbb{R})$ a svoju odpoveď dokážte.

12. (10 bodov). Nech $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ je báza priestoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{V} = \{\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_4, \vec{u}_1 - \vec{u}_3, \vec{u}_1 + \vec{u}_4, -2\vec{u}_1\}$. Nájdite maticu prechodu od bázy $\mathcal{U}$ k báze $\mathcal{V}$.

13. (10 bodov) Uvažujte nasledujúci nehomogénny systém lineárnych rovníc nad poľom $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcr} ix_1 & - & 3x_2 & = & 2 \\ 5x_1 & + & ix_2 & = & 5 \end{array}$$

Použitím Cramerovho pravidla vypočítajte neznámu x_1. Odpoveď musí byť v tvare $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

14. (10 bodov) Podpriestor $\mathbb{Z}_2^4$.

Uvažujte množinu vektorov $\{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}$. Doplňte túto množinu na podpriestor priestoru $\mathbb{Z}_2^4$.

15. (15 bodov) V euklidovskom priestore $\mathbb{R}^4$ určte vzdialenosť bodu $(1,2,1,3)$ od nadroviny

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1.$$

16. (15 bodov) Nájdite riešenie rovnice

$$115 \cdot x \equiv 2028 \pmod{2029}.$$

17. (15 bodov) Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

a $f_{\mathbf{A}}$ je lineárna transformácia definovaná predpisom:

$$f_{\mathbf{A}}(x, y) = \mathbf{A} \cdot (x, y)^T.$$

Stručne zdôvodnite tvrdenie, že ak sú vektory $\vec{u} = (a, b)$ a $\vec{v} = (c, d)$ na seba kolmé v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^2$, tak sú na seba kolmé aj vektory $f_{\mathbf{A}}(a, b)$ a $f_{\mathbf{A}}(c, d)$.