Lineárna algebra a geometria I. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 30. septembra 2024

---

1. (1.2.1) Pre rovnice $x+y=4$, $2x-2y=4$ nakreslite riadkový obrázok (dve pretínajúce sa priamky) a stĺpcový obrázok (kombináciu dvoch stĺpcových vektorov rovnajúcu sa stĺpcovému vektoru (4,4) na pravej strane).

2. (1.3.11) Použite elimináciu na nájdenie riešení systémov

$$\begin{aligned} u+\ v+\ w &= 6 \\ u+2v+2w &= 11 \\ 2u+3v-4w &= 3 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} u+\ v+\ w &= 7 \\ u+2v+2w &= 10 \\ 2u+3v-4w &= 3. \end{aligned}$$

3. (1.3.3) Riešte systém a nájdite pivoty pre

$$\begin{aligned} 2u-\ v\qquad\quad &= 0 \\ -u+2v-\ w\quad\ &= 0 \\ -v+2w-\ z &= 0 \\ -\ w+2z &= 5. \end{aligned}$$

Systém môžete redukovať pomocou maticového zápisu – pravú stranu písať ako piaty stĺpec a vynechávať neznáme u, v, w, z v medzivýpočtoch.

Nasledujúce dve cvičenia predstavujú cvičenia na zostavovanie rovníc. Predpokladajme, že

(a) 80 percent z tých, čo bývajú v Kalifornii na začiatku roka tam býva aj na konci, zvyšných 20 percent sa počas roka odsťahuje preč.

(b) 90 percent z tých, čo začnú rok mimo Kalifornie aj mimo Kalifornie zostane, zvyšných 10 percent sa počas roka do Kalifornie prisťahuje.

Ak poznáme situáciu na začiatku, povedzme 200 miliónov mimo a 30 miliónov v Kalifornii, potom je jednoduché nájsť čísla u a v zodpovedajúce počtom mimo, resp. v Kalifornii na konci roka:

$$0,9(200\,000\,000)+0,2(30\,000\,000) = u$$
$$0,1(200\,000\,000)+0,8(30\,000\,000) = v$$

Problémom však zostáva spätný výpočet, t.j. vypočítať začiatočné podmienky z koncových.

4. (1.3.12) Ak $u = 200$ miliónov a $v = 30$ miliónov na konci roka, nájdite rovnice pre príslušné počty na začiatku.

5. (1.3.13) Ak sú u a v na konci roka ako rovnaké ako u a v na začiatku, ako vyzerajú príslušné rovnice? Aký je pomer medzi u a v v takomto "stabilnom stave"?

6. (1.4.1) Vypočítajte súčiny

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Okrem toho do súradnicovej sústavy vyznačte polohové vektory bodov $x = 2$, $y = 1$ a $x = 0$, $y = 3$. Graficky znázornite súčet týchto vektorov a porovnajte s výsledkom tretieho súčinu, vysvetlite.

7. (1.4.3) Nájdite skalárne a maticové súčiny

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prvý z nich udáva dĺžku vektora (na druhú).

8. (1.4.10) Ak označíme zložky matice A ako a_{ij}, vyjadrite v tejto symbolike

(i) prvý pivot,

(ii) násobok l_i prvého riadku, ktorý musíme v eliminácii odčítať od i-teho riadku,
(iii) novú hodnotu, ktorá nahradí hodnotu a_{ij} po tomto odčítaní,
(iv) hodnotu druhého pivota.

9. (1.4.19) Ktorá z nasledujúcich matíc sa musí rovnať $(A+B)^2$?
$(B+A)^2, A^2+2AB+B^2, A(A+B)+B(A+B), (A+B)(B+A), A^2+AB+BA+B^2.$