Lineárna algebra – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 11. novembra 2024, na precvičenie pred písomkou

---

1. (2.6.5) Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov u a v môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P = \{tu + (1-t)v \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia α zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zobrazí na stred úsečky z $\alpha(x)$ do $\alpha(y)$.

2. (2.6.9) Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(2+3t)$-násobok.

3. (2.6.13) Predpokladajme, že α je lineárna transformácia roviny xy reprezentovaná maticou M. Ukážte, že ak existuje zobrazenie α^{-1}, potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica M^{-1} reprezentuje α^{-1}.

4. (2.6.21) Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru (x_1, x_2, x_3) do (x_2, x_3, x_1) je rotácia. Nájdite jej os a uhol.

5. (2.R.10) Vymyslite vektorový priestor, ktorý obsahuje všetky lineárne transformácie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Musíte definovať sčítanie lineárnych transformácií, ako aj násobenie skalárom. Aká bude dimenzia takéhoto priestoru?

6. (2.R.23) Ako by sa dala skonšturovať matica, ktorá zobrazí vektory štandardnej bázy e_1, e_2, e_3 na dané vektory v_1, v_2, v_3? Kedy bude takáto matica invertibilná?

7. (3.1.6) V $\mathbb{R}^3$ nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory $(1,1,1)$ a $(1,-1,0)$. Vytvorte z týchto vektorov bázu $\mathbb{R}^3$, v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

8. (3.1.8) Nech V a W sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j. $V \cap W = \{0\}$.

9. (3.1.11) Tvrdenie o riešiteľnosti systémov lineárnych rovníc sa dá formulovať pomocou tzv. *Fredholmovej alternatívy*: pre každé A a b má práve jeden zo systémov riešenie

$$\text{(i)} \quad Ax = b \qquad\qquad \text{(ii)} \quad A^T y = 0, \quad y^T b \neq 0.$$

Inými slovami, buď b patrí do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ alebo existuje y v $\mathcal{N}(A^T)$ také, že $y^T b \neq 0$. Ukážte, že rovnice (i) a (ii) nemôžu mať riešenie zároveň.

10. (3.1.14) Ukážte, že $x - y$ je kolmé na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

11. (3.1.19) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.
a) ak V je ortogonálne k W, potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
b) Ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z, potom aj V je ortogonálne k Z.

12. (3.1.22) Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^4$ tvorený vektormi spĺňajúcimi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nájdite bázu priestoru $S^\perp$, t.j. priestoru vektorov kolmých na S.

13. (2.6.19) Vo vektorovom priestore $P_3(t)$ polynómov stupňa 3, t.j. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0 \in \mathbb{R}$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.
Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$. Všimnite si, že zobrazenie $p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)dt$ je lineárna transformácia z $P_3(t)$ do $\mathbb{R}$ a množina S jej jadro.