

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej algebry a geometrie I., 6. november 2023

1. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- nájdite dimenziu a bázy jej nulového priestoru $\mathcal{N}(A)$ a stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$,
- nájdite rovnicu/e, ktorú/é musia spĺňať zložky vektora $b \in \mathcal{S}(A)$,
- pre (každé) $b \in \mathcal{S}(A)$ nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$.

2. V závislosti od hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

- nájdite jej LDU rozklad (ak sa dá eliminovať bez výmeny riadkov),
- určite aká môže byť jej najmenšia a najväčšia hodnota,
- nájdite dimenzie a bázy jej nulového priestoru $\mathcal{N}(A)$ a stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$.

3. Uvažujme množinu

$$W = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} a+b & a & a & a+c \\ a & a+b & a+c & a \\ a & a+c & a+b & a \\ a+c & a & a & a+b \end{array} \right] \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Ukážte, že W tvorí vektorový podpriestor v $M_{4,4}(\mathbb{R})$. Nájdite jeho dimenziu a bázu.
- Ukážte, že množina W je uzavretá aj na maticové násobenie, teda $AB \in W$ pre všetky $A, B \in W$.
- Pre ktoré trojice hodnôt $a, b, c \in \mathbb{R}$ je matica $A \in W$ regulárna? V regulárnom prípade nájdite A^{-1} . Bude potom A^{-1} tiež patriť do W ? Zdôvodnite.

4. O lineárnom zobrazení $\alpha : \mathcal{P}_2(x) \rightarrow \mathcal{P}_2(x)$ vieme, že $\alpha(1+x^2) = 1+x^2$, $\alpha(x+x^2) = -x-x^2$ a $\alpha(1-x+x^2) = 2-2x+2x^2$.

- Ukážte, že $1+x^2$, $x+x^2$ a $1-x+x^2$ tvoria bázu $\mathcal{P}_2(x)$.
- Nájdite obrazy $\alpha(1)$, $\alpha(x)$ a $\alpha(x^2)$.
- Pre polynóm $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathcal{P}_2(x)$ nájdite obraz $\alpha(p)(x)$.
- Existuje inverzné zobrazenie α^{-1} ? Ak nie, zdôvodnite; ak áno, nájdite $\alpha^{-1}(p)(x)$ pre $p \in \mathcal{P}_2(x)$.

5. (Pravda/Nepravda) So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom.

- Ak U a V sú podpriestory vektorového priestoru X , potom je aj ich prienik $U \cap V$ vektorovým podpriestorom X .
- Ak U a V sú podpriestory vektorového priestoru X , potom je aj ich zjednotenie $U \cup V$ vektorovým podpriestorom X .