Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry I., 13. december 2023

1. Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite $\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(A^T)$, t.j. nejakú bázu tohto priestoru.
b) Nájdite bázu $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(A^T)$.
c) Bez počítania povedzte, čo bude $\mathcal{S}(A) + \mathcal{N}(A)$. Zdôvodnite.

2. Nech α a β sú lineárne zobrazenia z U do V.

a) Ukážte, že zobrazenie $\alpha + \beta : U \to V$ je lineárne.
b) Nájdite konkrétne protipríklady kedy nebudú platiť rovnosti:

(i) $\mathrm{Im}(\alpha + \beta) = \mathrm{Im}(\alpha) + \mathrm{Im}(\beta)$ (ii) $\mathrm{Ker}(\alpha + \beta) = \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)$.

c) Ukážte, že rovnosti v časti b) sa dajú nahradiť inklúziami, ktoré už budú platiť.

3. Nech $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ sú lineárne nezávislé vektory.

a) Ukážte, že množina $W = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \mathcal{S}(A) \subseteq \mathrm{span}\{a_1, a_2\},\, \mathcal{S}(A^T) \subseteq \mathrm{span}\{a_1, a_2\}\}$ tvorí vektorový podpriestor v $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
b) Ukážte, že množina $\{a_1 a_1^T, a_1 a_2^T, a_2 a_1^T, a_2 a_2^T\}$ je bázou W.
c) Predpokladajme, že matica

$$P = c_{11} a_1 a_1^T + c_{12} a_1 a_2^T + c_{21} a_2 a_1^T + c_{22} a_2 a_2^T \in W$$

je maticou kolmej projekcie. Akú hodnosť môže mať matica P? V závislosti od hodnosti $h(P)$ určte do ktorého priestoru bude P projektovať. Nájdite koeficienty $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ ak $h(P) = 2$.

4. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nájdite pomocou Gram-Schmidtovho ortogonalizačného procesu jej QR rozklad.

5. Nájdite determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & t & t \\ t & 1 & t & t \\ -t & -t & 1 & t \\ -t & -t & t & 1 \end{bmatrix}$$

a zistite pre aké hodnoty parametra t je singulárna.