Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie I., 10. január 2024

1. *(5 bodov)* Nech V a W sú podpriestory $\mathbb{R}^4$ dané ako:

$$V = \text{span}[(1,2,3,4)^T, (0,4,1,-1)^T], \qquad W = \text{span}[(4,3,1,-6)^T, (2,1,2,1)^T].$$

a) Nájdite ortonormálnu bázu priestoru V.

b) Nájdite dimenziu a bázu prieniku $U = V \cap W$.

c) Nájdite matice P_V, P_W a P_U kolmých projekcií na podpriestory V, W a U.

2. *(4 body)* Nech $u_1, \ldots, u_k, v, w$ sú vektory vo vektorovom priestore V. Predpokladajme, že $w \in \mathit{Span}(u_1, \ldots, u_k, v)$, ale $w \notin \mathit{Span}(u_1, \ldots, u_k)$. Ukážte, že potom $v \in \mathit{Span}(u_1, \ldots, u_k, w)$.

3. *(5 bodov)* Majme maticu $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, kde $ad - bc = 1$. Definujme zobrazenie T na vektorovom priestore $M_{2,2}$ matíc typu 2×2 ako

$$T : M_{2,2} \to M_{2,2}, \qquad T(X) = AXA^{-1}.$$

a) ukážte, že T je lineárne zobrazenie,

b) nájdite bázu priestoru $M_{2,2}$ a maticu zobrazenia T vzhľadom na túto bázu (maticu označme M_T),

c) ukážte, že stopa zobrazenia T (t.j. $\text{tr}(M_T)$) spĺňa $\text{tr}(T) = \text{tr}(A)^2$.

4. *(6 bodov)* Nech T, U a W sú podpriestory priestoru V.

a) Ukážte na konkrétnom protipríklade, že nasledujúca rovnosť priestorov neplatí: $(T + U) \cap W = (T \cap W) + (U \cap W)$.

b) Ukážte, že rovnosť sa dá nahradiť inklúziou (rozhodnite ktorým smerom), ktorá už platiť bude.

c) Ukážte, že platí $W \cap (T + (U \cap W)) = (T \cap W) + (U \cap W)$.

5. *(15 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom:

a) Ak A a B sú dve 3×3 matice hodnosti 1, potom $\det A - \det B = \det(A - B)$.

b) Ak $h(A) < n$ pre $2n \times 2n$ maticu A, potom existuje nenulový vektor patriaci do $N(A)$ aj $N(A^T)$.

c) Projekčné matice tvoria vektorový podpriestor v priestore $n \times n$ matíc.

d) Ak $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ pre $m \times n$ maticu A, potom je $A^T A$ regulárna matica.

e) Rovnica $p''(t) - p(t) = q(t)$ má riešenie $p \in \mathcal{P}_3$ pre každú pravú stranu $q \in \mathcal{P}_3$.

f) Ak pre $n \times n$ maticu A platí $A^k = 0$, potom je $I + A$ regulárna.

6. *(5 bodov)* Nájdite determinant $n \times n$ matice

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1} & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{1+\alpha_2}{\alpha_2} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & \frac{1+\alpha_n}{\alpha_n} \end{bmatrix}.$$