

Lineárna algebra

1-DAV-104/20

Leto 2024

10. cvičenia

1. Nech A je matica lineárneho zobrazenia f . Nájdite maticu zobrazenia f vzhľadom na bázu \mathcal{B} .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & -9 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 3), (0, 2, 2)\}.$$

2. Sú zadané matice podobné? (Hint: Kedy je matica podobná diagonálnej? Ak sú dve matice podobné, aké ich vlastnosti sa musia nutne zhodovať?)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Ak sú matice A a B podobné a v je vlastný vektor matice A , musí byť v vlastným vektorom aj pre maticu B ?

4. Ak sú matice A a B podobné, je matica P vo vzťahu $B = P^{-1}AP$ určená jednoznačne?

5. Dokážte, že ak D je diagonálna $n \times n$ matica a všetky prvky na jej diagonále sú kladné, tak predpis $\langle x, y \rangle = xDy^T$ definuje skalárny súčin na \mathbb{R}^n .

6. Vypočítajte uhly medzi nasledujúcimi dvojicami vektorov:

a) $(1, 0)$ a $(\cos(\pi/7), \sin(\pi/7))$.

b) $(1, -2, -1, 0)$ a $(0, 1, 1, 0)$.

7. Vypočítajte dĺžky strán a uhly v trojuholníku, ktorý je určený bodmi A, B, C .

$$A = (-1, 0, -1, 2); \quad B = (0, 2, 0, 3); \quad C = (2, 1, 1, 2).$$

8. Nájdite bázu a dimenziu ortogonálneho doplnku podpriestoru S priestoru \mathbb{R}^4 .

a) $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle$.

b) $S = \langle (1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1) \rangle$.

c) $S = \langle (2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1) \rangle$.

9. Pomocou Gram-Schmidtovej ortogonalizácie nájdite ortonormálne bázy nasledujúcich priestorov.

a) $\langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$

b) $\langle (1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 3), (4, 3, 2, 1) \rangle$

c) $\langle (1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3) \rangle$

10. Napíšte rovnicu nadroviny v priestore \mathbb{R}^3 kolmej na vektor $(-1, 2, 3)$ a obsahujúcej bod $(1, 1, 1)$.

11. Zistite, pre ktoré hodnoty parametra c sú nadroviny určené nasledujúcimi rovnicami na seba kolmé.

$$-3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \quad \text{a} \quad x_1 - cx_2 + x_3 + 0x_4 = -1$$

12. V \mathbb{R}^3 vypočítajte uhol medzi nadrovinami

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \text{a} \quad x_1 - x_2 + x_3 = -1.$$