Lineárna algebra
leto 2024
3. cvičenie

- Pre danú množinu 'vektorov' s operáciou sčítania a násobenia skalárom zistite, či tvorí vektorový priestor a ak áno, dokážte, že je vektorovým priestorom.

  1. množina všetkých riešeni homogénneho systému lineárnych rovníc so sčítaním a násobením skalárom definovanými po súradniciach
  2. množina všetkých vektorov ortogonálnych k danej množine vektorov so sčítanim a násobením skalárom definovanými po súradniciach
  3. množina všetkých $m \times n$ matíc s reálnymi koeficientami a so sčítaním matíc a násobením skalárom ako sme ho definovali na prednáške
  4. množina komplexných čísel s operáciou sčítania komplexných čísel a násobenia reálnym číslom
  $$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$
  $$\alpha \cdot (a + bi) = \alpha a + \alpha b\, i$$
  5. $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$
  $$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{u}_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\ \}$$
  lineárny obal vektorov $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$
  6. množina všetkých (aj konštantných) polynómov s reálnymi koeficientami s operáciou sčítania polynómov a násobenia polynómov reálnym číslom
  7. množina všetkých funkcii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so sčítaním po zložkách a násobením reálnymi číslami definovaným po zložkách:
  $$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} : \qquad f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
  $$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pre všetky x } \in \mathbb{R}$$
  $$(c \cdot f)(x) = cf(x), \text{ pre všetky x } \in \mathbb{R}$$
  8. $$\{\vec{u} \mid \vec{u} \in \mathbb{R}^n \text{ a } u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0\ \}$$
  9. Zdôvodnite, prečo množina riešení nehomogénneho systému nikdy nie je vektorovým priestorom.
  10. Nájdite **všetky** podpriestory priestoru $\mathbb{Z}_2^2$.
  11. O koľko ťažšie by bolo nájsť všetky podpriestory priestoru $\mathbb{Z}_2^3$?
  Keby ste museli napísať program, ktorý by našiel všetky podpriestory priestoru $\mathbb{Z}_2^n$, ako by vyzeral a aká by bola jeho výpočtová zložitosť?
  12. Vyriešte nasledujúci systém nad $\mathbb{Z}_2$. Napíšte jeho riešenie parametricky a vypíšte aj všetky riešenia ako zoznam.
  $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array}$$
  Overte, že množina riešení tohto systému je vektorovým podpriestorom $\mathbb{Z}_2^3$.

- **Food for Thought** (toto je skôr na premyslenie doma)

  1. Uvažujme systém dvoch rovníc o dvoch neznámych nad $\mathbb{R}$, ktorý má parametrické riešenie obsahujúce jeden parameter. Predstavte si, že Vám niekto odovzdá takéto riešenie. Navrhnite 'skúšku správnosti', t.j., postup, ako by ste si overili, že je to riešenie určite správne a úplné? Stačí overiť konečne veľa riešení a ak áno, koľko riešení je potrebné overiť?
  2. Uvažujme systém dvoch rovníc o troch neznámych nad $\mathbb{R}$, ktorý má parametrické riešenie obsahujúce jeden parameter. Predstavte si, že Vám niekto odovzdá takéto riešenie. Navrhnite 'skúšku správnosti', t.j., postup, ako by ste si overili, že je to riešenie určite správne a úplné? Stačí overiť konečne veľa riešení a ak áno, koľko riešení je potrebné overiť? Je nejaký rozdiel medzi touto a predchádzajúcou otázkou?
  3. Uvažujme systém dvoch rovníc o troch neznámych nad $\mathbb{R}$, ktorý má parametrické riešenie obsahujúce dva parametre. Predstavte si, že Vám niekto odovzdá takéto riešenie. Navrhnite 'skúšku správnosti', t.j., postup, ako by ste si overili, že je to riešenie určite správne a úplné? Stačí overiť konečne veľa riešení a ak áno, koľko riešení je potrebné overiť?
  4. Môže mať systém, v ktorom sa všetky pravé strany rovnajú nule, prázdnu množinu riešení?