Lineárna algebra
1-DAV-104/20
Leto 2024
4. cvičenia

1. Nech $\vec{u}_1 = (1,1,0,0)$ a $\vec{u}_2 = (0,1,1,0)$. Nájdite všetky vektory priestoru $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$.
2. Popíšte lineárny obal $\langle 2+2x^2, x+x^3 \rangle \leq \mathbb{R}[x]$.
   $\langle 2+2x^2, x+x^3 \rangle = \{a(2+2x^2)+b(x+x^3) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{2a+bx+2ax^2+bx^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, čo je množina polynómov stupňa 3 (alebo stupňa 2, ak $b=0$; alebo stupňa 0 ak $a=b=0$), v ktorých sa absolútny koeficient rovná koeficientu pri x^2 a koeficient pri x sa rovná koeficientu pri x^3; takže napr. $-5x-5x^3$ alebo $-5-5x^2$ alebo $-5+5x-5x^2+5x^3$ patria do lineárneho obalu, ale $-5+5x-5x^2-5x^3$ tam nepatrí.
3. Zdôvodnite $\mathbb{R}^n = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$; t.j., vektory $\vec{e}_1, e_2, \dots, \vec{e}_n$ generujú priestor $\mathbb{R}^n$.
4. Zdôvodnite, že žiadna vlastná podmnožina množiny $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ negeneruje priestor $\mathbb{R}^n$.
5. Ukážte $\langle (1,2,3,4), (4,3,2,1) \rangle = \langle (1,1,1,1), (-3,-1,1,3) \rangle$.
6. Ukážte $\langle (1,2), (2,4) \rangle \neq \mathbb{R}^2$
7. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ sú lineárne nezávislé.
8. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1), (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ sú lineárne nezávislé.
9. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (1,1,1), (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ sú lineárne závislé.
10. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1), (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ sú lineárne závislé.
11. Ukážte, že vektory $(1,2,3), (3,2,1), (1,1,1), (1,0,1), \in \mathbb{R}^3$ generujú $\mathbb{R}^3$, ale nie sú lineárne nezávislé.
12. Nech $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5 \in \mathbb{R}^4$, pričom vieme, že $\vec{u}_5 \notin \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \rangle$. Zdôvodnite, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ musia byť lineárne závislé.
13. Nech $\vec{u}_1 = (1,2,3,4)$, $\vec{u}_2 = (4,3,2,1)$. Nájdite vektory $\vec{u}_3, \vec{u}_4$ tak, aby vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ tvorili bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$.
14. Nech $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$. Môžu vektory $\vec{u}$, $\alpha\vec{u}, \vec{v}$ generovať $\mathbb{R}^3$ pre nejaké $\alpha \in \mathbb{R}$?
15. Rozhodnite, či vektory $(1,2,3,4), (4,3,2,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1)$ tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$.
16. Nech $\vec{u}_1 = (1,2,3,4)$, $\vec{u}_2 = (4,3,2,1)$. Je možné vybrať z množiny vektorov
   $$(1,0,0,0), (1,1,0,0,), (0,0,0,1), (1,1,1,0), (0,0,1,1)$$
   niektoré tak, aby vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ spolu s vybranými vektormi tvorili bázu priestoru $\mathbb{R}^4$?