

Lineárna algebra

1-DAV-104/20

Leto 2024

5. cvičenia

1. Je priestor všetkých polynómov $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ s vlastnosťou $p(0) = 0$ konečne generovaný?
2. Nájdite aspoň tri rôzne bázy priestoru $\langle (-1, 2, 0, 3), (2, -1, 1, 0), (-1, 1, -1, 1) \rangle$.
3. Vyriešte cvičenia 3, 4, 5 a 9 na str. 88 v Korbašových skriptách.
4. Určte dimenziu priestoru $\langle (1, 1, -1, -1), (1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$.
5. Nájdite koordináty vektora $(1, 2, 3, 4)$ vzhľadom na bázu $(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Hľadáte reálne čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, pre ktoré platí

$$(1, 2, 3, 4) = \alpha_1(1, 1, 1, 0) + \alpha_2(1, 1, 0, 1) + \alpha_3(1, 0, 1, 1) + \alpha_4(0, 1, 1, 1)$$

6. Dokážte, že ak $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ je báza vektorového priestoru \mathbb{R}^k , koordináty vektora \vec{v}_1 vzhľadom na túto bázu sú $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$, koordináty vektora \vec{v}_2 vzhľadom na túto bázu sú $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]$, tak koordináty vektora $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ vzhľadom na túto bázu sú $[\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_k + \beta_k]$.
7. Nech vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ tvoria bázu vektorového priestoru \mathbb{R}^k a vektor \vec{v} má vzhľadom na túto bázu koordináty $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$. Aké koordináty má vektor \vec{v} vzhľadom na bázu $2\vec{u}_1, 2\vec{u}_2, \dots, 2\vec{u}_k$?
8. Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} + \mathbb{W}$, ak $\mathbb{V} = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$ a $\mathbb{W} = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$.
9. Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} + \mathbb{W}$, ak $\mathbb{V} = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$ a $\mathbb{W} = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$.
10. Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} + \mathbb{W}$, ak $\mathbb{V} = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$ a $\mathbb{W} = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1) \rangle$.
11. Nech $\dim \mathbb{U} = 3$ a $\dim \mathbb{V} = 2$. Určte dimenziu priameho súčtu $\mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.
12. Nech $\dim(\mathbb{U} + \mathbb{V}) = 4$, $\dim \mathbb{U} = 3$ a $\dim \mathbb{V} = 2$. Určte $\dim(\mathbb{U} \cap \mathbb{V})$.
13. Nech $\dim \mathbb{U} = 3$ a $\dim \mathbb{V} = 2$. Môže byť $\dim(\mathbb{U} + \mathbb{V}) = 6$?
14. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Určte dimenziu priestoru $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$.
- Nájdite redukovanú stupňovitú maticu riadkovo ekvivalentnú k matici \mathbf{A} .
- Rozhodnite, či sú matice \mathbf{A} a

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

riadkovo ekvivalentné.

15. Popíšte všetky matice, ktoré sú riadkovo ekvivalentné jednotkovej matici \mathbf{I}_n .
16. Je pravda, že dve $m \times n$ matice sú riadkovo ekvivalentné vtedy a len vtedy, keď sa rovnajú ich hodnoti?
17. Popíšte všetky matice, ktoré sú riadkovo ekvivalentné matici $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Food for Thought:

1. ak $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$, tak **Hammingova vzdialenosť** medzi vektormi \vec{u} a \vec{v} je počet pozícií, v ktorých sa líšia; označujeme ju $d(\vec{u}, \vec{v})$
Napr., $d((1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 0)) = 1$, $d((1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)) = 2$, a $d((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0)) = 3$.

2. **váha vektora** $\vec{u} \in \mathbb{Z}_2^n$ je počet nenulových pozícií v \vec{u} ; označujeme ju $w(\vec{u})$
Napri., $w((1, 1, 1, 0)) = 3$, $w(1, 0, 1, 0) = 2$, $w((0, 0, 0, 0)) = 0$.

3. Platia vety:

- Ak $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$, tak $d(\vec{u}, \vec{v}) \leq n$
- Ak $\vec{u} \neq \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^n$, tak $d(\vec{u}, \vec{v}) \geq 1$

4. Nech $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$. **Minimálna vzdialenosť** v kóde \mathcal{C} , $d(\mathcal{C})$, je najmenšia vzdialenosť medzi akýmikoľvek dvoma rôznymi vektormi z \mathcal{C} :

$$d(\mathcal{C}) = \min\{d(\vec{u}, \vec{v}) \mid \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{C}, \vec{u} \neq \vec{v}\}$$

5. **Veta:** Ak $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ je lineárny kód, tak

$$d(\mathcal{C}) = \min\{w(\vec{u}) \mid \vec{0} \neq \vec{u} \in \mathcal{C}\}$$

6. Nech $\mathcal{C} = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0) \rangle$. Určte dimenziu priestoru \mathcal{C} , počet vektorov v \mathcal{C} a $d(\mathcal{C})$. Aká je váha najľahšieho nenulového vektora v \mathcal{C} ? Aká je váha najťažšieho nenulového vektora v \mathcal{C} ?