

Lineárna algebra

1-DAV-104/20

Leto 2024

6. cvičenia

1. Upravte dané matice na redukovaný stupňovitý tvar a určite ich hodnoti.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vyriešte cvičenia z Korbaša: str. 119 / 1, 2, 4, 5, 6, 7; str. 135 / 1, 2, 3; str. 136 / 4.

3. Ktoré z nasledujúcich zobrazení sú lineárne transformácie?

- (a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_1(x, y) = (x + y, y)$;
- (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_2(x, y) = (x + 1, y + 2)$;
- (c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x, y) = (x^2, y^2)$;
- (d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_4(x, y) = 3x + y$;
- (e) $f_5 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}; f_5(p(x)) = p(1)$;
- (f) $f_6 : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2; f_6(p(x)) = (1, p(0))$;

4. Nech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je definované predpisom

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, -2x_3, x_1 + x_2, x_2)$$

- Rozhodnite, či je zobrazenie f lineárnou transformáciou.
- Nájdite riadkovú aj stĺpcovú matice zobrazenia f vzhľadom na jednotkovú bázu.
- Určte dimenziu jadra zobrazenia f .
- Určte dimenziu obrazu zobrazenia f .
- Rozhodnite, či je zobrazenie f injekcia, surjekcia alebo bijekcia.

5. Nech $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je definované predpisom

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, -2x_3, x_1 + x_2 + x_4)$$

- Rozhodnite, či je zobrazenie g lineárnou transformáciou.
- Nájdite riadkovú aj stĺpcovú matice zobrazenia g vzhľadom na jednotkovú bázu.
- Určte dimenziu jadra zobrazenia g .
- Určte dimenziu obrazu zobrazenia g .
- Rozhodnite, či je zobrazenie g injekcia, surjekcia alebo bijekcia.

6. Nech $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je definované predpisom

$$h(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, -2x_3, x_1 + x_2)$$

- Rozhodnite, či je zobrazenie h lineárnou transformáciou.
- Nájdite riadkovú aj stĺpcovú matice zobrazenia h vzhľadom na jednotkovú bázu.
- Určte dimenziu jadra zobrazenia h .
- Určte dimenziu obrazu zobrazenia h .
- Rozhodnite, či je zobrazenie h injekcia, surjekcia alebo bijekcia.

Food for Thought:

1. Nech $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ je akékoľvek zobrazenie (t.j., nemusí sa jednať o lineárnu transformáciu). Jadro zobrazenia f sa dá zdefinovať aj v tomto prípade ako množina $\text{Ker}(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$.

- Platí naďalej tvrdenie, že f je injekcia vtedy a len vtedy, keď $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$?
- Platí aspoň jedna z tých dvoch implikácií?
- Viete nájsť nejakú netriviálnu podmienku tak, aby f bolo injekciou vtedy a len vtedy, keď je táto podmienka pre f splnená?

2. Nech \mathbb{A} je matica obsahujúca len nuly a jednotky. Musí sa hodnosť matice \mathbb{A} nad poľom \mathbb{R} rovnáť hodnosti matice \mathbb{A} nad poľom \mathbb{Z}_2 ?