

Lineárna algebra

1-DAV-104/20

Leto 2024

7. cvičenia

1. Vypočítajte nad \mathbb{R} determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Vypočítajte nad \mathbb{Z}_5 determinant matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Vypočítajte nad \mathbb{R} determinant matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Vypočítajte nad \mathbb{R} determinant matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Vypočítajte nad \mathbb{Z}_5 determinant matice

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Nech \mathbf{M} je štvorcová horná trojuholníková matica nad \mathbb{R} , t.j., matica, v ktorej platí $m_{i,j} = 0$ ak $i > j$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dokážte, že determinant matice \mathbf{M} sa rovná súčtinu $\prod_{i=1}^n a_{ii}$.

7. Matica $\mathbf{H} \in \mathbb{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_7)$ sa prehodením prvého a tretieho riadku a odrátaním dvojnásobku druhého riadku od štvrtého riadku zmení na maticu

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určte determinant matice \mathbf{H} .

8. Pomocou Cramerovho pravidla vyriešte nasledujúci nehomogénny systém nad \mathbb{Z}_7 .

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

9. Nad \mathbb{R} vypočítajte charakteristický polynóm matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Nad \mathbb{R} vypočítajte charakteristický polynóm matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Nad \mathbb{R} nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Nad \mathbb{Z}_7 nájdite charakteristický polynóm, všetky vlastné hodnoty a vlastné vektory matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$