

Písomka č I.
Lineárna Algebra
1-DAV-104

29. 3. 2023

Meno: _____

1. (8 bodov)

a) Nájdite riešenie nasledujúceho systému nad \mathbb{R} .

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 4 \end{array}$$

Odpoveď zadajte v tvare súčtu vektora a lineárneho obalu lineárne nezávislých vektorov.

b) Koľko voľných premenných má tento systém?

c) Aká je dimenzia priestoru riešení homogénneho systému vytvoreného z tohto systému nahradením pravých strán nulami?

2. (8 bodov)

a) Nájdite riešenie nasledujúceho systému nad \mathbb{Z}_5 .

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 4 \end{array}$$

Odpoveď zadajte v tvare súčtu vektora a lineárneho obalu lineárne nezávislých vektorov.

- b) Koľko voľných premenných má tento systém?
- c) Aká je dimenzia priestoru riešení homogénneho systému vytvoreného z tohto systému nahradením pravých strán nulami?
3. (8 bodov)
- a) Nájdite riešenie nasledujúceho systému nad \mathbb{C}

$$\begin{aligned} ix_1 + x_2 &= 2 - i \\ -x_1 + (2 + i)x_2 &= i \end{aligned}$$

Odpoveď zadajte v parametrickom tvare.

- b) Koľko voľných premenných má tento systém?
- c) Aká je dimenzia priestoru riešení homogénneho systému vytvoreného z tohto systému nahradením pravých strán nulami?
4. (10 bodov) Dokážte tvrdenie:
- Pre maticu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tvoria riešenia homogénneho systému $A\vec{x}^T = \vec{0}^T$ vektorový podpriestor v \mathbb{R}^n .*

5. (5 bodov) Nad poľom \mathbb{Z}_5 nájdite všetky hodnoty parametra a , pre ktoré je nasledujúci systém rovníc nekonzistentný (nemá žiadne riešenie). Svoju odpoveď zdôvodnite.

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & a \end{array}$$

6. (3 body) Vypočítajte nad \mathbb{R} (všetky odpovede sú funkciou parametra a):

$$(1 - a, 2 - a, 3, -1) \cdot (4, 3, 2, 0) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

7. (6 bodov) Nájdite súradnice vektora $(1, 2, 3, a)$ vzhľadom na bázu

$$(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$$

pre parameter $a \in \mathbb{R}$.

8. (8 bodov) Rozhodnite, či množina vektorov

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}, x_1^2 - 4x_1x_3 + 4x_3^2 = 0\}$$

tvorí vektorový podpriestor priestoru \mathbb{R}^4 . Svoje rozhodnutie stručne zdôvodnite.

9. (6 bodov) Rozhodnite, či platí:

$$\langle (1, 2, 3), (6, 4, 2), (8, 4, 0), (-1, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3$$

Svoje rozhodnutie stručne zdôvodnite.

10. (6 bodov) Zistite pre aké hodnoty parametra b sú matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

riadkovo ekvivalentné nad \mathbb{R} . Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

11. (8 bodov) Určte dimenziu priestoru $\mathbb{V} + \mathbb{W}$, ak $\mathbb{V} = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$ a $\mathbb{W} = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$.

12. (10 bodov) Nad **poľom** \mathbb{Z}_5 vypočítajte determinanty matíc

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

13. (4 body) Určte počet inverzií permutácie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

14. (10 bodov) Nech $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je definovaná predpisom

$$\varphi(x, y, z) = (x + 2y - z, -x + 2y + z).$$

Nájdite stĺpcovú maticu zobrazenia φ .

Nájdite jadro zobrazenia φ , t.j. bázu podpriestoru $\ker(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^3$.