**Písomka č. II.**
**Lineárna Algebra**
**1-DAV-104/20**

3. 5. 2023 Meno: ____________________

1. (9 bodov) Dokážte, že stopa súčinu matíc spĺňa:

$$tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = tr(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

2. (5 bodov) Vypočítajte charakteristický polynóm matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (5 bodov) Rozhodnite, či je grupa $\mathbb{Z}_{18}^{\times}$ cyklická.

4. (5 bodov) Určte rád permutácie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

v grupe $\mathbb{S}_7$.

5. (5 bodov) Nájdite súčin $AB$ pre matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$.

6. (5 bodov) Vynásobte permutácie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} =$$

7. (7 bodov) Nájdite inverzný prvok k prvku 32 v grupe $\mathbb{Z}_{109}^{\times}$.

8. (5 bodov) Vyriešte rovnicu

$$32x \equiv 15 \pmod{109}.$$

9. (7 bodov) Nájdite inverznú maticu k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Q}$.

10. (5 bodov) Rozhodnite, či tvorí množina $\{1, 5, 8, 12\}$ podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$. Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

11. (6 bodov) Nájdite ľavú triedu podgrupy $\langle 4 \rangle$ grupy $\mathbb{Z}_{13}^{\times}$ rôznu od triedy $\langle 4 \rangle$.

12. (6 bodov) Nad $\mathbb{R}$ nájdite maticu prechodu $\mathbb{P}$ od bázy $(2, 1), (-2, 1)$ k báze $(1, 2), (1, 1)$.

13. (10 bodov) Nech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineárna transformácia definovaná predpisom

$$f(u_1, u_2, u_3) = (u_2, u_1 + u_2, u_2 + u_3).$$

a) Nájdite riadkovú maticu $\mathbb{A}$ tejto transformácie vzhľadom na bázu $(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$.

b) Určite dimenzie jadra a obrazu tejto transformácie. Svoje odpovede zdôvodnite.

14. (10 bodov) Pomocou Gram-Schmidtovej ortogonalizácie ortonormalizujte v $\mathbb{R}^4$ množinu vektorov

$$(1, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 0), (1, -1, 3, 1)$$

15. (5 bodov) Nájdite parameter $b$ (závislý od $a$), aby boli nadroviny $ax_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$ a $x_1 - bx_2 + 2bx_3 = -4$ v $\mathbb{R}^4$ navzájom kolmé.

16. (5 bodov) Určte kladnú hodnotu parametra $b$ tak, aby mal vektor $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, b)$ dĺžku 1.