Písomná skúška
Lineárna Algebra
1-DAV-104

7.6.2023 Meno: ____________________

Príklady čítajte pozorne a riešenia napíšte v požadovanej forme.
Ak príklad žiada dôkaz, uveďte dôkaz. **Na tejto písomke sa hodnotí kvalita dôkazov - nestačí len 'niečo napísať'.**
Ak príklad žiada nejaké konkrétne objekty, uveďte konkrétne objekty. Hodnotia sa aj neúplné riešenia. Ak neviete príklad úplne vyriešiť, uveďte relevantné fakty súvisiace s riešením problému.

1. (15 bodov) Nájdite systém štyroch lineárnych rovníc o štyroch neznámych nad $\mathbb{Z}_7$, ktorého množinou riešení je množina

$$\{(3,2,1,0) + \alpha(1,1,0,1) + \beta(1,2,1,0) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_7\}.$$

Je dôležité, aby mal váš systém správnu hodnosť, správny počet premenných a rovníc. Vaše riešenie má byť systém rovníc s koeficientami a neznámymi v $\mathbb{Z}_7$. Zdôvodnite správnosť svojho systému.

2. (5 bodov) Nájdite dve mimobežné priamky (nerovnobežné a nepretínajúce sa) v $\mathbb{R}^3$. Svoju odpoveď zdôvodnite.

3. (5 bodov) V $\mathbb{R}^3$ nájdite priesečník nadroviny $x + y - z = -2$ a priamky $\{(1,2,2) + \gamma(1,2,3) \,|\, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

4. (10 bodov) Rozhodnite, či sú vektory

$$(1,2,0,4,5),(5,4,0,2,-1),(1,-1,0,-2,0),(3,3,0,0,a) \in \mathbb{R}^5$$

lineárne nezávislé pre nejaké $a \in \mathbb{R}$. Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.

5. (10 bodov) Dokážte, že ak $\mathbf{A}$ je $n \times n$ ortogonálna matica, tak zobrazenie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané predpisom $\varphi(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \mathbf{A}$ je izometria.

6. (15 bodov) Určte počet surjektívnych lineárnych transformácií z priestoru $\mathbb{Z}_2^3$ do priestoru $\mathbb{Z}_2^2$. Podrobne zdôvodnite svoju odpoveď.

   (*Návod: počet LN riadkov matice je rovný počtu LN stĺpcov matice*)

7. (15 bodov) Nájdite ortonormálnu bázu priestoru riešení nasledujúceho homogénneho systému rovníc nad $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

8. (10 bodov) Dokážte nasledujúce tvrdenie:

Nech $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *je lineárna transformácia. Potom* $Im(\varphi)$ *je vektorový podpriestor priestoru* $\mathbb{V}$.

9. (10 bodov)

Uvažujte množinu vektorov $\{(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$. Doplňte túto množinu na najmenší možný podpriestor priestoru $\mathbb{Z}_2^4$.

10. (15 bodov) Nech $\vec{u} = (1,1,1,1)$ a $\mathcal{S} \subseteq GL(4,\mathbb{R})$ je množina všetkých matíc $\mathbf{B} \in GL(4,\mathbb{R})$ s vlastnosťou $\mathbf{B}\vec{u}^T = \alpha_{\mathbf{B}}\vec{u}^T$ pre nejaké $\alpha_{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^+$. T.j. $\alpha_{\mathbf{B}}$ je nejaké kladné reálne číslo, ktoré závisí od konkrétnej matice $\mathbf{B} \in \mathcal{S}$. Rozhodnite, či je množina $\mathcal{S}$ podgrupou grupy $GL(4,\mathbb{R})$ a svoju odpoveď dokážte.

11. (20 bodov) Nech $\mathbf{B} \in GL(3,\mathbb{R})$ je matica:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite charakteristický polynóm matice $\mathbf{B}$.

b) Nájdite vlastné hodnoty matice $\mathbf{B}$.

c) Nájdite tri lineárne nezávislé vlastné vektory matice $\mathbf{B}$.

12. (20 bodov) Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ je matica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na čísla a a b, aby $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Svoje tvrdenie dokážte priamo z definície determinantu alebo použitím viet vyslovených na prednáške.

13. (10 bodov). Nech $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ je báza priestoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{V} = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{u}_3 + \vec{u}_4, \vec{u}_4\}$. Nájdite maticu prechodu od bázy $\mathcal{U}$ k báze $\mathcal{V}$.

14. (10 bodov) V euklidovskom priestore $\mathbb{R}^4$ určte vzdialenosť bodu $(1, 2, 3, 4)$ od nadroviny

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1.$$

15. (15 bodov) Nech $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ je vektor dĺžky 1.

a) Ukážte, že 3×3 matica $\mathbf{A} = 2 \cdot \vec{u}^T \cdot \vec{u} - \mathbf{I}$ je symetrická a ortogonálna.

b) Nájdite maticu z časti a) pre $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

16. (15 bodov) Kladne definitná kvadratická forma

Uvažujte kvadratickú formu v $\mathbb{R}^3$: $x_1^2 + 2ax_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 4ax_2x_3 + 4x_3^2$.

a) Nájdite symetrickú 3×3 maticu zodpovedajúcu tejto kvadratickej forme.

b) Nájdite všetky možné hodnoty parametra a, pre ktoré je táto forma kladne definitná. Svoju odpoveď stručne zdôvodnite.