

1. (1.3.2) Pre systém

$$u + v + w = 2$$

$$u + 3v + 3w = 0$$

$$u + 3v + 5w = 2$$

postupnou elimináciou nájdite príslušný trojuholníkový systém a jeho riešenie.

2. (1.3.4) Použite eliminačnú metódu pre systém

$$u + v + w = -2$$

$$3u + 3v - w = 6$$

$$u - v + w = -1.$$

Ak sa počas eliminácie vyskytne nula na pozícii pivota, vymeňte príslušnú rovnicu s nasledujúcou a pokračujte v eliminácii ďalej. Aká hodnota koeficientu pri neznámej v v poslednej rovnici, namiesto súčasnej -1 , by znemožnila pokračovať v eliminácii, a teda spôsobila zlyhanie eliminačného algoritmu?

3. (1.2.2) Riešte nesingulárny systém rovníc v trojuholníkovom tvare

$$u + v + w = b_1$$

$$v + w = b_2$$

$$w = b_3.$$

Ukážte, že nájdené riešenie udáva kombináciu stĺpcov, ktorá sa rovná stĺpcu na pravej strane.

4. (1.2.8) Zdôvodnite prečo je systém

$$u + v + w = 2$$

$$u + 2v + 3w = 1$$

$$v + 2w = 0$$

singulárny, nájdite lineárnu kombináciu týchto troch rovníc, ktorá sa vysčíta do rovnosti $0 = 1$. Akou hodnotou musíme nahradiť nulu v poslednom riadku na pravej strane, aby sústava mala riešenie? Ako vyzerá také riešenie?

5. (1.2.11) Sústava rovníc

$$ax + 2y = 0$$

$$2x + ay = 0$$

má vždy riešenie $x = y = 0$. Pre akú hodnotu parametra a máme celú priamku riešení?

Ďalšie príklady

6. Uvažujme dva vektory $u = [u_1, u_2, u_3]^T$ a $v = [v_1, v_2, v_3]^T$. Ukážte, že $u \perp v$ práve vtedy, keď $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.¹

7. a) Uvažujme rovinu danú rovnicou $\rho : ax + by + cz = d$ (všeobecná rovnica roviny, normálový tvar)². Ukážte, že vektor $n = [a, b, c]^T$ je kolmý na rovinu ρ .³

b) (1.2.12) Načrtnite rovinu danú rovnicou $x + y + z = 1$, resp. jej časť v kladnom oktante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Načrtnite rovinu danú rovnicou $x + y + z = 2$ v tom istom obrázku. Ktorý vektor je *kolmý* na tieto roviny?

¹Výraz $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ sa nazýva skalárny súčin vektorov u a v .

² $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, navyše, pretože ide o rovinu, aspoň jedno z čísel a, b, c je nenulové

³Vektor je kolmý na rovinu ρ práve vtedy, keď je kolmý na ľubovoľnú priamku z roviny ρ .

8. (1.2.5) Nájdite dva body na priamke, ktorá je prienikom nadrovín daných rovnicami $t = 0$, $z = 0$ a $x + y + z + t = 1$ v štvorrozmernom priestore.