

1. (1.6.5) Ak B je inverzná matica k A^2 , ukážte, že inverzná matica k (štvorcovej) A bude AB .

Pozn. Uvedomte si, že to znamená, že A je invertibilná práve vtedy, keď A^2 je. Ako by sa toto tvrdenie dalo dokázať pomocou skúmania hodnôt, nulových resp. stĺpcových priestorov matíc A a A^2 ?

2. (1.R.18) Predpokladajme, že 4×4 matica A má tvar :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

teda ide o maticu, ktorá vznikla z jednotkovej nahradením druhého stĺpca nejakým vektorom v .

- a) Akú podmienku musí spĺňať vektor v , aby bola matica A regulárna?

Návod: skúste sa pozrieť na priestor $\mathcal{S}(A)$.

- b) Pre regulárne A nájdite jej LU rozklad.

- c) Pre regulárnu A nájdite aj A^{-1} .

3. (2.R.13) Pomocou eliminácie nájdite rozklad matice $A = LU$ (za predpokladu, že existuje), ak

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Akú podmienku musia spĺňať čísla a, b, c, d aby boli stĺpce A lineárne nezávislé?

4. Rozhodnite, či sú vektory $a = [1, -1, 5]^T$, $b = [2, 1, 1]^T$ a $c = [1, 0, 2]^T$ lineárne nezávislé. Ako súvisí riešenie homogénneho systému

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

s vyšetrovaním lineárnej nezávislosti/závislosti vektorov a, b, c ?

5. (2.3.2 b,c) Rozhodnite či sú nasledujúce vektory lineárne závislé alebo nezávislé:

- b) $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$, $v_3 - v_4$, $v_4 - v_1$ pre ľubovoľné vektory v_1, v_2, v_3 a v_4 ,

- c) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ a (x, y, z) , kde x, y a z sú ľubovoľné reálne čísla.

6. (2.3.4) Je pravda, že ak sú vektory v_1, v_2 a v_3 lineárne nezávislé, potom sú aj vektory $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$ a $w_3 = v_2 + v_3$ lineárne nezávislé? *Pomôcka:* Predpokladajte $c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0$ a nájdite vhodné c_i .

7. (2.3.15) Predpokladajme, že priestor V má dimenziu $k < +\infty$. Ukážte, že

- a) ľubovoľných k lineárne nezávislých vektorov $x_1, \dots, x_k$ vo V tvorí jeho bázu,

- b) ľubovoľných k vektorov $x_1, \dots, x_k$, ktoré generujú celé V tvorí jeho bázu.

Návod. V časti a) potrebujete overiť generovanie (lineárna nezávislosť vyplýva zo zadania). Predpokladajte, že by existoval vektor y z V , ktorý by sa nedal vyjadriť ako lineárna kombinácia k vektorov. Ukážte, že $x_1, \dots, x_k, y$ sú lineárne nezávislé a navyše $\text{span}\{x_1, \dots, x_k, y\} \subseteq V$. Aké sú dimenzie týchto dvoch priestorov? Podobne v časti b).

8. (2.3.20) V priestore matíc typu 2×2 nájdite bázu podpriestoru P – matíc, pre ktoré sa súčty zložiek v riadkoch aj stĺpcoch rovnajú. Teda

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b = c + d = a + c = b + d \right\}.$$

9. (2.3.18, 2.3.22, 2.4.21) Pravda/nepravda. Zdôvodnite.

- a) Ak sú stĺpce matice A lineárne nezávislé, potom má systém $Ax = b$ práve jedno riešenie pre každé b .
- b) Matica typu 5×7 nikdy nemôže mať lineárne nezávislé stĺpce.
- c) Každá báza podpriestoru W sa dá rozšíriť na bázu priestoru V . (predpokladajme $\dim W \neq \dim V$)
- d) Každá báza priestoru V sa dá zredukovať na bázu podpriestoru W . (opäť $\dim W \neq \dim V$)
- e) Ak sú štyri základné podpriestory matice A rovnaké ako tie pre maticu B , potom $A = B$.

10. (2.4.3) a) Nájdite dimenzie a bázy pre všetky štyri základné podpriestory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. (2.4.20) Nájdite maticu s požadovanými vlastnosťami, alebo dokážte, že taká nemôže existovať.

- a) Stĺpcový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, riadkový priestor obsahuje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- b) Stĺpcový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, nulový priestor má bázu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- c) Stĺpcový priestor $= \mathbb{R}^4$, riadkový priestor $= \mathbb{R}^3$.

Ďalšie príklady

12. (1.R.15) Nájdite hodnotu c v nasledujúcej $n \times n$ inverznej matici:

$$\text{ak } A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdot & -1 \\ -1 & n & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & n \end{bmatrix}, \text{ potom } A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & c & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & c \end{bmatrix}.$$

Pozn. n vo veľkosti $n \times n$ matice a n vo vnútri matice A je to isté n .

13. (2.3.17) Ukážte, že ak V a W sú trojrozmerné podpriestory priestoru $\mathbb{R}^5$, potom existuje nenulový vektor patriaci do V aj W , teda $V \cap W \neq \{0\}$.

14. (2.4.6) Ukážte, že systém $Ax = b$ má riešenie práve vtedy, ak $\text{hodnosť}(A) = \text{hodnosť}(A')$, kde matica A' je matica, ktorú získame z A pridaním b ako stĺpca navyše.