

1. (2.R.3) Pravda/Nepravda (nájdite zdôvodnenie, resp. protipríklad):
 - a) Ak vektory $x_1, x_2, \dots, x_m$ generujú priestor S , potom $\dim S = m$.
 - b) Prienik dvoch podpriestorov vektorového priestoru X nemôže byť prázdny.
 - c) Ak $Ax = Ay$, potom $x = y$.
 - d) Ak má štvorcová matica A lineárne nezávislé stĺpce, potom ich má aj matica A^2 .
2. (2.R.9) Vo vektorovom priestore matíc typu 2×2 ,
 - a) budú tvoriť matice s hodnotou 1 vektorový podpriestor?
 - b) bude podpriestor generovaný permutačnými maticami vyzeráť ako?
 - c) bude podpriestor generovaný kladnými maticami (t.j. všetky $a_{ij} > 0$) vyzeráť ako? Dá sa nájsť báza $M_{2,2}$, ktorá pozostáva len z matíc s kladnými prvkami?
 - d) bude podpriestor generovaný invertibilnými maticami vyzeráť ako? Dá sa nájsť báza $M_{2,2}$, ktorá pozostáva len z invertibilných matíc?
3. (2.R.17) Ak pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T y = 0$ pre každé $y \in \mathbb{R}^n$, ukážte, že $x = \vec{0}$.
4. (2.R.18) Ak A je $n \times n$ matica spĺňajúca $A^2 = A$ a A má hodnotu n , potom ukážte, že $A = I$.
5. (2.R.20) Koľko 5×5 permutačných matíc existuje? Sú lineárne nezávislé v $M_{5,5}$? Generujú celý priestor $M_{5,5}$ matíc typu 5×5 ? (Netreba ich vypisovať všetky)
6. (2.R.22) a) Akú podmienku musí spĺňať pravá strana b , aby mal systém $Ax = b$ riešenie, ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} ?$$
 - b) Nájdite bázu nulového priestoru matice A .
 - c) Nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$, ak riešenie existuje.
 - d) Nájdite bázu stĺpcového priestoru matice A .
 - e) Aká je hodnota matice A^T ?
7. Uvažujme vektorový priestor $\mathcal{P}_6$ reálnych polynómov stupňa najvyššie 6 v premennej x . Ukážte, že $\mathcal{P}_6(0)$ – množina polynómov, pre ktoré je 0 koreňom, bude podpriestorom $\mathcal{P}_6$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(0)$.
 Podobne uvažujme polynómy s koreňom 1: $\mathcal{P}_6(1) = \{p(x) \mid p(1) = 0, p(x) \in \mathcal{P}_6\}$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(1)$. Čo bude prienik $\mathcal{P}_6(0) \cap \mathcal{P}_6(1)$, akú bude mať dimenziu?

8. (2.6.16) Priestor všetkých matíc typu 2×2 má štyri báзовé “vektory”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?

Ďalšie príklady

9. (2.6.3) Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmich rotácií roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transformácie robíme?
10. (2.6.7) Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré
 - i) sprojektujú každý vektor do roviny xy ,
 - ii) zobrazia každý vektor symetricky podľa roviny xy ,

- iii) otočia rovinu xy o uhol γ , nechajúc os z namieste,
- iv) otočia rovinu xy , potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz , vždy o 90° ,
- v) spraví tie isté rotácie ako v iv) len vždy o 180° .