

Opakovanie pred písomkou

1. (2.4.8) Prečo nemôže existovať matica, ktorej nulový aj riadkový priestor by obsahovali vektor $[1, 1, 1, 1]^T$?

2. (2.4.12) Nech $Ax = 0$ má netriviálne riešenie. Ukážte, že $A^T y = z$ nebude mať riešenie pre nejaké z . Nájdite príklad takého A a z .

3. (2.6.9) Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(2 + 3t)$ -násobok.

4. (2.4.17) (*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A , teda $AB = I$. Po prenasobení maticou A^T dostaneme $A^T AB = A^T$, z čoho $B = (A^T A)^{-1} A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj ľavá inverzná matica k A . Ktorý krok v tomto “dôkaze” je nekorektný?

5. Uvažujme zobrazenie $\tau : \mathcal{P}_3(x) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ dané predpisom

$$\tau : p \mapsto \begin{bmatrix} p(-1) & p(1) \\ p(1) & p(-1) \end{bmatrix}.$$

- Overte, že zobrazenie τ je lineárne.
- Nájdite $\text{Im}(\tau)$ a $\text{Ker}(\tau)$. Overte, že platí $\dim(\text{Im}(\tau)) + \dim(\text{Ker}(\tau)) = \dim(\dim(\mathcal{P}_3(x)))$.
- Nájdite T maticu zobrazenia τ vzhľadom na štandardné bázy oboch priestorov a nájdite $\mathcal{S}(T)$ a $\mathcal{N}(T)$.

Ortogonalita

6. (3.1.6) V $\mathbb{R}^3$ nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory $[1, 1, 1]^T$ a $[1, -1, 0]^T$. Vytvorte z týchto vektorov bázu $\mathbb{R}^3$, v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

7. (3.1.8) Nech V a W sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j. $V \cap W = \{0\}$.

8. (3.1.11) Tvrdenie o riešiteľnosti systémov lineárnych rovníc sa dá formulovať pomocou tzv. *Fredholmovej alternatívy*: pre každé A a b má práve jeden zo systémov riešenie

$$(i) \quad Ax = b \qquad (ii) \quad A^T y = 0, \quad y^T b \neq 0.$$

Inými slovami, buď b patrí do stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$ alebo existuje y v $\mathcal{N}(A^T)$ také, že $y^T b \neq 0$. Ukážte, že rovnice (i) a (ii) nemôžu mať riešenie zároveň.

9. (3.1.14) Ukážte, že $x - y$ je kolmé na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

10. (3.1.19) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.

- ak V je ortogonálne k W , potom aj $V^\perp$ je ortogonálne k $W^\perp$,
- Ak V je ortogonálne k W a W je ortogonálne k Z , potom aj V je ortogonálne k Z .

11. (3.1.22) Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^4$ tvorený vektormi spĺňajúcimi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nájdite bázu priestoru $S^\perp$, t.j. priestoru vektorov kolmých na S .