

1. (3.2.5) Aký uhol zvierá vektor  $[1, 1, \dots, 1]^T$  v  $\mathbb{R}^n$  so súradnicovými osami? Ako vyzerá projekcia na priamku danú týmto vektorom?

2. (3.1.20) Nech  $S$  je podpriestor  $\mathbb{R}^n$ . Vysvetlite, čo znamená rovnosť  $(S^\perp)^\perp = S$  a prečo platí.

3. (3.2.3) Aký násobok vektora  $a = [1, 1, 1]^T$  je najbližšie k bodu  $b = [2, 4, 4]^T$ ? Nájdite tiež najbližší bod k bodu  $a$  na priamke prechádzajúcej cez  $b$ .

4. (3.2.8) Molekula metánu  $\text{CH}_4$  vyzerá tak, že atóm uhlíka je v strede pravidelného štvorstena a štyri atómy vodíka sú v jeho vrcholoch. Ak si za vrcholy vyberieme body  $[0, 0, 0]^T$ ,  $[1, 1, 0]^T$ ,  $[1, 0, 1]^T$  a  $[0, 1, 1]^T$ , potom dĺžky všetkých hrán medzi nimi budú  $\sqrt{2}$ , teda naozaj ide o pravidelný štvorsten. Aký je kosínus uhla medzi úsečkami spájajúcimi stred  $[1/2, 1/2, 1/2]^T$  s vrcholmi? Aká je veľkosť tohto uhla?

5. (3.2.11) a) Nájdite projekčnú maticu  $P_1$  zobrazujúcu rovinu  $\mathbb{R}^2$  na priamku danú vektorom  $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  a maticu  $P_2$  zobrazujúcu rovinu na priamku s ňou kolmú.

b) Vypočítajte  $P_1 + P_2$  a  $P_1 P_2$ . Vysvetlite.

6. (3.2.13) Ukážte, že stopa  $\text{tr}(P)$  matice  $P = aa^T/a^T a$  – t.j. súčet zložiek na jej diagonále – sa vždy rovná 1.

7. (3.2.16) Predpokladajme, že  $P$  je projekčná matica na priamku prechádzajúcu cez  $a$ .

a) prečo je skalárny súčin vektorov  $x$  a  $Py$  rovnaký ako skalárny súčin vektorov  $Px$  a  $y$ ?

b) sú aj uhly medzi nimi rovnaké? Porovnajme ich kosínusy pre  $a = [1, 1, -1]^T$ ,  $x = [2, 0, 1]^T$  a  $y = [2, 1, 2]^T$ .

c) Prečo je skalárny súčin vektorov  $Px$  a  $Py$  opäť rovnaký? Aký je uhol medzi týmito dvoma vektormi?

8. (3.3.6) Nájdite projekciu vektora  $b$  do stĺpcového priestoru matice  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rozložte  $b$  na zložku  $p$  patriacu do stĺpcového priestoru a zložku  $r$  kolmú na tento priestor. Do ktorého zo štyroch základných podpriestorov patrí vektor  $r$ ?

9. (3.3.9) a) Ak  $P = P^T P$ , ukážte, že  $P$  je projekčnou maticou.

b) Na aký podpriestor zobrazuje projekčná matica  $P = 0$ ?

10. (3.3.10) Ak sú vektory  $a_1, a_2$  (stĺpce matice  $A$ ) a  $b$  vzájomne ortogonálne, čo výjde pri počítaní  $A^T A$  a  $A^T b$ ? Aká je projekcia vektora  $b$  na rovinu danú vektormi  $a_1$  a  $a_2$ ?

### Ďalšie príklady

11. (3.1.17) Nech  $V$  je ortogonálny doplnok podpriestoru  $W$  v  $\mathbb{R}^n$ . Existuje matica, ktorej riadkový priestor je  $V$  a nulový priestor je  $W$ ? Vychádzajúc z bázy priestoru  $V$ , ukážte ako by sa skonštruovala taká matica.

12. (3.3.4) Pre nasledujúce  $A$ ,  $x$  a  $b$  rozpíšte chybový člen  $E^2 = \|Ax - b\|^2$  ako kvadratickú funkciu dvoch premenných  $u$  a  $v$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite rovnicu, vyjadrujúcu fakt, že derivácia  $E^2$  vzhľadom na  $u$  (resp.  $v$ ) je nulová. Porovnajte tieto rovnice s  $A^T A \bar{x} = A^T b$  a presvedčte sa, že analýza dáva tie isté normálové rovnosti ako geometria. Nájdite riešenie  $\bar{x}$  a projekciu  $p = A\bar{x}$ . Prečo platí  $p = b$ ?