

1. Nájdite príklad podpriestorov V a W v $\mathbb{R}^3$ tak, aby $V \cap W$ obsahovalo iba nulový vektor ale V nebol ortogonálny na W .

2. (3.R.19) Ukážte, že ak vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, potom $v_1 v_1^T + \dots + v_n v_n^T = I$.

3. (3.R.20) *Pravda/Nepravda*: Ak vektory x a y sú ortogonálne a P je projekcia, potom Px a Py sú ortogonálne. Zdôvodnite.

4. Majme vektory $a_1 = [1, 1, 1]^T$ a $a_2 = [1, -1, 1]^T$. Maticu projekcie na vektor a_1 označme P_1 a maticu projekcie na vektor a_2 označme P_2 . T.j. $P_i = \frac{a_i a_i^T}{a_i^T a_i}$. Nájdite maticu projekcie P na rovinu generovanú vektormi a_1, a_2 a presvedčte sa, že $P \neq P_1 + P_2$. Akú podmienku by museli spĺňať vektory a_1, a_2 aby takáto rovnosť platila?

5. (3.4.18) Ak $A = QR$ nájdite jednoduchý vzorec pre projekčnú maticu P zobrazujúcu do stĺpcového priestoru A .

6. (3.R.39) Ako vyzerá matica $A^T A$ ak sú stĺpce matice A ortogonálne? Ako keď sú ortonormálne?

7. (3.6.1) Nech S a T sú podpriestory $\mathbb{R}^{13}$ s dimenziami $\dim S = 7$ a $\dim T = 8$.

- a) Aká je najväčšia možná dimenzia $S \cap T$?
- b) Aká je najmenšia možná dimenzia $S \cap T$?
- c) Aká je najmenšia možná dimenzia $S + T$?
- d) Aká je najväčšia možná dimenzia $S + T$?

8. (3.6.6) Ak $V \cap W = \{0\}$, potom sa súčet $V + W$ nazýva *priamy súčet* priestorov V a W . Značíme $V \oplus W$. Ak je V generovaný vektormi $[1, 1, 1]^T$ a $[1, 0, 1]^T$, nájdite W aby $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

9. (3.6.7) Zdôvodnite, prečo sa každý vektor x v priamom súčte $V \oplus W$ dá *jednoznačne* vyjadriť ako $x = v + w$ pre $v \in V$ a $w \in W$.

10. (3.6.8) Priestor V je generovaný vektormi $v_1 = [1, 1, 0, 0]^T$, $v_2 = [1, 0, 1, 0]^T$ a priestor W vektormi $w_1 = [0, 1, 0, 1]^T$ a $w_2 = [0, 0, 1, 1]^T$. Nájdite bázu súčtu $V + W$, ako aj bázu a dimenziu prieniku $V \cap W$.

Ďalšie príklady

4. (3.R.31) Ukážte, že vzdialenosť nadroviny $a^T x - c = 0$ od počiatku v $\mathbb{R}^m$ je $|c|/\|a\|$. Ako ďaleko je nadrovina $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8$ od počiatku a ktorý jej bod je k nemu najbližšie?

7. (3.4.24) Nájdite nasledujúce Legendrove polynómy – t.j. polynómy stupňa 3 a 4 ortogonálne na 1, x a $x^2 - \frac{1}{3}$ na intervale $\langle -1, 1 \rangle$.