

1. (4.2.15) Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra λ je $A - \lambda I$ singulárna?

2. (4.2.1) Ako súvisia hodnoty determinantov $\det(2A)$, $\det(-A)$ a $\det(A^2)$ s hodnotou determinantu $\det(A)$ pre $n \times n$ maticu A ?

3. (4.2.4) Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{a} \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$

4. (4.2.5) Koľko výmen riadkov potrebujeme, na to aby sme prešli od matice A k matici I :

$$A = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \vdots \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}?$$

Kedy je $\det A = 1$ a kedy $\det A = -1$? (V príklade 4.2.4 sme mali $n = 4$ a $\det A = 1$)

5. (4.2.10) Použitím riadkových operácií overte, že determinant 3×3 Vandermondovej matice je

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

Skúste vypočítať Vandermondov determinant pre 4×4 maticu a aj pre $n \times n$ maticu.

6. (4.2.14) Pre nasledujúce matice nájdite determinanty použitím Gaussovej eliminácie:

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}.$$

7. (4.2.11) a) Antisymetrická matica spĺňa $K^T = -K$, napríklad

$$K = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Vysvetlite prečo v 3×3 prípade platí $\det(-K) = (-1)^3 \det K$. Zároveň $\det K^T = \det K$ (toto platí vždy). Z toho vyvoďte, že taká matica má nulový determinant.

- b) Nájdite antisymetrickú 4×4 maticu s nenulovým determinantom.

8. (4.2.13) Ak v matici A je súčet zložiek v každom riadku nula, ukážte, že $\det A = 0$. Ak je súčet zložiek v každom riadku 1, ukážte, že $\det(A - I) = 0$. Nájdite takú maticu A , pre ktorú z toho nevyplýva, že $\det A = 1$.

9. (4.2.17) Predpokladajme, že $CD = -DC$. Nájdite chybu v nasledujúcom dôvodení: Zoberúc determinanty, dostávame $(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C)$, čiže aspoň jedna z matic C alebo D musí mať

nulový determinant. Preto rovnosť $CD = -DC$ môže nastať iba ak C alebo D je singulárna.

10*. a) Uvažujme maticu M v blokovom tvare

$$M = \begin{bmatrix} A_{m \times m} & B_{m \times n} \\ 0_{n \times m} & D_{n \times n} \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že platí $\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)$.

b) Z rovností

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & B \\ -A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & AB \end{bmatrix}$$

a

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & B \\ -A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ I & B \end{bmatrix}$$

dokážte, že $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

c) Nájdite príklad 4×4 matice rozdelenej na 2×2 bloky A, B, C, D , že

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \neq \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C).$$

Ďalšie príklady

11. (3.6.17) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ a potom tzv. *Choleského* faktory $(LD^{1/2})(LD^{1/2})^T$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 45 \end{bmatrix}.$$

12. (3.R.24, 25) Tomograf (ľudovo "CT-čko", to je to, čo sa predražene nakupuje) sníma pacienta z rôznych smerov röntgenovými lúčmi a potom vyprodukuje obrázok zodpovedajúci matici udávajúcej hustotu kostí a tkanív v každom bode. Z matematického hľadiska ide o zistenie hodnôt zložiek akejkoľvek matice z jej projekcií.

Vieme zrekonštruovať 2×2 maticu A , ak poznáme súčty zložiek v každom jej riadku a stĺpci?

Podobne, vieme v 3×3 prípade zrekonštruovať maticu A ak poznáme súčty zložiek v každom riadku, v každom stĺpci ako aj súčty pozdĺž hlavnej diagonály a susedných dvoch diagonál s ňou rovnobežných?