

Podvádžanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej algebry a geometrie I., 14. november 2024

1. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a) nájdite dimenziu a bázy jej nulového priestoru $\mathcal{N}(A)$ a stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$,
- b) nájdite rovnicu/e, ktorú/é musia spĺňať zložky vektora $b \in \mathcal{S}(A)$,
- c) pre (každé) $b \in \mathcal{S}(A)$ nájdite všeobecné riešenie systému $Ax = b$.

2. V závislosti od hodnôt parametrov $a, b \in \mathbb{R}$ pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & b & 0 & -b \\ b & a-1 & b & 0 \\ 0 & -b & a-1 & b \\ b & 0 & b & a-1 \end{bmatrix}$$

- a) nájdite dimenzie a bázy jej nulového priestoru $\mathcal{N}(A)$ a stĺpcového priestoru $\mathcal{S}(A)$,
 - b) zistite, či je regulárna, a v tom prípade nájdite aj A^{-1} .
3. Nech $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je pevne daná matica a $W_B = \{A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid AB = A\}$.
- a) Ukážte, že W_B tvorí vektorový podpriestor v $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
 - b) Ukážte, že $\dim(W_B) > 0$ práve vtedy, keď existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^n$ taký, že $Bx = x$.
 - c) Ukážte, že $A \in W_B$ práve vtedy, keď $\mathcal{S}(B - I) \subseteq \mathcal{N}(A)$.
 - d) Pre maticu

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nájdite dimenziu a bázu W_B .

4. Uvažujme lineárne zobrazenie $\alpha : \text{Sym}_2 \rightarrow \text{Sym}_2$ na priestore symetrických matíc typu 2×2 . O zobrazení α vieme, že

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Nájdite maticu, ktorá sa v zobrazení α zobrazí do matice $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.
- b) Je zobrazenie α určené jednoznačne? Nájdite množinu všetkých matíc v Sym_2 , ktorých obrazy je možné vypočítať. Akú podmienku spĺňajú ich zložky?
- c) Predpokladajme, že

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix},$$

kde $a \in \mathbb{R}$. Akú podmienku musí spĺňať parameter a , aby zobrazenie α bolo invertibilné?

d) Nájdite predpis zobrazenia α pre hodnotu $a = 2$.

5. (Pravda/Nepravda) So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom.

- a) Pre symetrické matice A, B platí $\text{hodnosť}(AB) = \text{hodnosť}(BA)$.
- b) Ak sú vektory u, v, w, x lin. nezávislé, tak sú aj vektory $u + v, v + w, w + x, x + u$ lin. nezávislé.