

Podvádanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry I., 18. december 2024

1. Nech V je podpriestor $\mathbb{R}^4$ generovaný vektormi $(1, -2, 0, 2)^T$, $(1, -3, 5, 1)^T$.
 - a) Nájdite ortonormálnu bázu podpriestoru V pomocou Gram-Schmidtovej ortogonalizácie.
 - b) Nájdite ortogonálny doplnok $V^\perp$ a jeho ortonormálnu bázu.
 - c) Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $V^\perp$.
 - d) Nájdite rozklad vektora $(1, 1, 1, 1)^T = x_V + x_{V^\perp}$, kde $x_V \in V$ a $x_{V^\perp} \in V^\perp$.
2. V priestore matíc $M_{2n, 2n}$ uvažujeme podpriestory K a L matíc tvaru:

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} U & -U - X \\ 0 & X \end{bmatrix} : U, X \in M_{n, n} \right\}, \quad L = \left\{ \begin{bmatrix} V & 0 \\ W & -V \end{bmatrix} : V, W \in M_{n, n} \right\}.$$

Nájdite dimenzie priestorov K , L , $K \cap L$ a $K + L$, popíšte ich bázy.

3. Nech $\alpha : U \rightarrow V$ je lineárne zobrazenie medzi vektorovými priestormi U a V a $u_1, u_2, \dots, u_n$ je báza priestoru U . Ukážte, že obrazy $\alpha(u_1), \alpha(u_2), \dots, \alpha(u_n)$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď je jadro zobrazenia α triviálne, t.j. $\text{Ker}(\alpha) = \{\vec{0}\}$.

4. Ukážte, že transformácia z $P_4(t)$ do $P_6(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(t^2 + 1)$ -násobok je lineárna. Nájdite jej maticu pre zvolené bázy $P_4(t)$ a $P_6(t)$. Popíšte aké bude mať táto transformácia jadro a obraz.

5. Nech

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

kde $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. Ak $\det(A) = 1$, nájdite determinant matice

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c & a \\ b & e & h & e \\ a & d & g & d \\ c & f & i & f \end{bmatrix}.$$