

Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie I., 20. január 2025

- (5 bodov) Majme vektory $u_1 = [0, 1, 1, 1, 0]^T$, $u_2 = [1, -1, 0, -1, 1]^T$, $u_3 = [1, 1, 1, 1, 1]^T$ a $v_1 = [2, 1, 2, 1, 2]^T$, $v_2 = [1, 2, 1, 2, 1]^T$, $v_3 = [1, 2, 3, 2, 1]^T$, $v_4 = [3, 2, 1, 2, 3]^T$ v $\mathbb{R}^5$.
 - Rozhodnite, či vektory u_1, u_2, u_3 a vektory v_1, v_2, v_3, v_4 generujú ten istý priestor.
 - Nájdite bázu a dimenziu $\text{span}[v_1, v_2, v_3, v_4]^\perp$.
 - Nájdite nejakú ortonormálnu bázu priestoru $\text{span}[v_1, v_2, v_3, v_4]$.
 - Nájdite maticu kolmej projekcie na $\text{span}[v_1, v_2, v_3, v_4]$.
- (5 bodov) Pre $n \times n$ maticu A a skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ (lambda) definujme množiny

$$V_\lambda(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} \quad \text{a} \quad V_\lambda(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^T x = \lambda x\}.$$

- Ukážte, že $V_\lambda(A)$ a $V_\lambda(A^T)$ sú vektorové podpriestory $\mathbb{R}^n$.
 - Ukážte, že $V_\lambda(A)$ a $V_\lambda(A^T)$ majú rovnakú dimenziu.
 - Aká je dimenzia $V_0(A)$ pre regulárnu maticu A ? (t.j. $\lambda = 0$).
- (5 bodov) Nech $\mathcal{P}$ je vektorový priestor polynómov s reálnymi koeficientami. Definujme transformácie $T, D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ako

$$T(p)(x) = x^2 p(x) \quad \text{a} \quad D(p)(x) = p''(x).$$

(Teda T reprezentuje násobenie funkciou x^2 a D dvojnásobné derivovanie $D : p \mapsto p''$.)

- Ukážte, že T a D sú lineárne transformácie.
- Nájdite matice zúžených zobrazení $D+T$, $D \circ T$ a $T \circ D$ vzhľadom na štandardnú bázu $\{1, x, x^2, x^3\}$ priestoru $\mathcal{P}_3$. ($\mathcal{P}_3$ je definičný obor všetkých troch zobrazení, správny obor hodnôt určite sami)
- Nájdite jadrá a obrazy transformácií $D \circ T$ a $T \circ D$.
- Aké zobrazenie predstavuje komutátor $[D, T] = D \circ T - T \circ D$?

- (5 bodov) Majme blokovú maticu $B = \begin{bmatrix} A & x \\ y^T & \alpha \end{bmatrix}$, kde $A_{n \times n}$ je regulárna, x je stĺpec, y^T riadok a α skalár. Ukážte, že platí:

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} A & x \\ y^T & -1 \end{bmatrix} = -\det(A + xy^T), \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} A & x \\ y^T & 0 \end{bmatrix} = -y^T \text{Adj}(A)x = -(\det A)y^T A^{-1}x.$$

Návod: Vhodnými operáciami preveďte matice na dolný, resp. horný blokovo-trojuholníkový tvar.

- (15 bodov) Pravda/Nepravda. So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom:
 - Ak sú P_1 a P_2 dve permutačné matice, potom je $P_1 - P_2$ singulárna.
 - Ak je pre matice $A_{m \times n}$ a $B_{n \times m}$ ich súčin AB regulárna matica, potom $n \geq m$.
 - Neexistuje reálna 5×5 matica spĺňajúca $A^2 = -I$.
 - Ak $h(A) < n$ pre $2n \times 2n$ maticu A , potom existuje nenulový vektor patriaci do $N(A)$ aj $N(A^T)$.
 - Pre $m \times n$ maticu A a $n \times k$ maticu B platí $AB = 0$ práve vtedy, keď $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{N}(A)$.
 - V priestore polynómov $\mathcal{P}(x)$ je zobrazenie dané predpisom $\alpha : p(x) \mapsto p(1) + p(x) + p(x)^2$ lineárne.
- (5 bodov) Nájdite hodnotu determinantu $n \times n$ matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & 1 + \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & 1 + \alpha_n \end{bmatrix}.$$