Matematika II. – Domáca úloha č. 1

Cvičenia v týždni 19. februára 2007

---

Na predošlom cvičení sme si ukázali, že ak priamka $p$ so smerovým vektorom $\vec{u} = (k, l)$ zviera s $x$-ovou osou uhol $\alpha$, potom $\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{k}$. Podobne, ak priamka $q$ so smerovým vektorom $\vec{v} = (m, n)$ zviera s $x$-ovou osou uhol $\beta$, potom uhol medzi týmito dvoma priamkami bude $\alpha - \beta$.

**1.** Ukážte, že $\sin \alpha = \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}$ a $\cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}}$. Nájdite podobné formuly pre priamku $q$.

**2.** Pomocou súčtových vzorcov pre trigonometrické funckcie nájdite hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ a $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$. Porovnajte s formulou z prednášky:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

*Vektorový súčin* v $\mathbb{R}^3$ je definovaný pre vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ako $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

**3.** Zistite ako vyzerá vektorový súčin vektorov $\vec{u}' = (k, l, 0)$ a $\vec{v}' = (m, n, 0)$. Ukážte tiež, že

$$|\sin(\alpha - \beta)| = \frac{|\vec{u}' \times \vec{v}'|}{|\vec{u}'||\vec{v}'|}.$$

**4.** Nech $k$ je kružnica v $\mathbb{R}^2$ daná rovnicou $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0$. Prepíšte túto rovnicu do polárnych súradníc $(r, \varphi)$ a upravte na čo najjednoduchší tvar.

**5.** Nájdite predpis, ktorý pre bod $A = (x, y)$ dáva jeho obraz po otočení o $90°$ proti smeru hodinových ručičiek okolo počiatku $O = (0, 0)$. Nájdite podobný predpis pre otočenie o $60°$, resp. o ľubovoľný uhol $\alpha$.

**6.** Nájdite predpis, ktorý pre bod $A = (x, y)$ dáva jeho zrkadlový obraz vzhľadom na priamku $y = x$.

**7.** Nájdite predpis, ktorý pre bod $A = (x, y)$ dáva jeho kolmú projekciu na priamku $y = x$.