

1. Riešte nasledujúce sústavy rovníc použitím maticového zápisu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Pre každú sústavu rovníc a jej riešenie nájdite geometrické vysvetlenie.

2. Majme matice A, B, C, D dané ako:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nájdite súčiny AB, BA, CD, DC, AC, DA .

3. Pre matice z príkladu č. 2 nájdite $A^T, B^T, C^T, D^T, A^T B^T, A^T D^T$.

4. Rozhodnite či vektory $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$, $\vec{w} = (1, 1, 2)$ tvoria bázu \mathbb{R}^3 - t.j. či sú lineárne nezávislé.

5. Pre vektory z predchádzajúceho cvičenia vypočítajte objem rovnobežnostena nimi generovaného.

Návod: Vyjadrite si obsah základne v rovine uv pomocou vektorového súčinu \vec{u} a \vec{v} a zistite aký uhol zvierajú vektory \vec{w} a $\vec{u} \times \vec{v}$. Výsledný objem porovnajte s determinantom matice $\begin{pmatrix} -\vec{u}- \\ -\vec{v}- \\ -\vec{w}- \end{pmatrix}$.

6. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 , ktoré zobrazuje body $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$ do $(0, 0, 3)$, $(0, -1, 2)$, $(2, 3, 3)$.

7. Majme maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pre ľubovoľné $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ z \mathbb{R}^2 nájdite riešenie systému $Ax = b$, v tvare $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, vyjadrené pomocou zložiek vektora b . Zostrojte takú maticu C , aby platilo $Cb = x$. Čo sa dá povedať o súčinoch AC a CA ? Ako by sme tento fakt mohli interpretovať, ak sa na A a C pozrieme ako na matice lineárnych zobrazení?