Matematika II. – Domáca úloha č. 4

Cvičenia v týždni 12. marca 2007

Domácou úlohou na tento týždeň zostávajú príklady č. 6 a 7 z úlohy č. 3.

1. Zistite či sú vektory $\vec{u} = (2,3,2,5)$, $\vec{v} = (-2,1,7,4)$, $\vec{w} = (2,3,2,1)$ lineárne nezávislé.

2. Zistite či sú vektory $\vec{s} = (1,2,3,4)$, $\vec{t} = (2,3,2,5)$, $\vec{u} = (-2,0,4,1)$, $\vec{v} = (6,1,-8,0)$ lineárne nezávislé. Spočítajte determinant matice, ktorej riadky sú vektory $\vec{s}, \vec{t}, \vec{u}, \vec{v}$.

3. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ktoré zobrazuje body $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$ do $\varphi(\vec{u}) = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\varphi(\vec{v}) = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)$. Pomôcka: vyjadrite vektory e_1, e_2 ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

4. Použite algoritmus riadkovej Gaussovej eliminácie na "systém": $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$.

Porovnajte s výsledkom príkladu č. 3 (stĺpcové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\varphi(\vec{u})$, $\varphi(\vec{v})$ sme tu nahradili riadkovými).

5. Nájdite inverznú maticu k $A = \left(\begin{smallmatrix}3&1&2\\0&2&1\\1&1&2\end{smallmatrix}\right)$ pomocou Gausovej eliminacie "systému" $(A|I)$, kde I je jednotková matica.

6. Majme maticu A z predchádzajúceho príkladu a matice $E_1 = \left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $E_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{smallmatrix}\right)$, $E_3 = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)$. Vypočítajte E_1A, E_2E_1A, $E_3E_2E_1A$. Aké sú determinanty matíc A, E_1, E_2, E_3, E_1A, E_2E_1A, $E_3E_2E_1A$?

7. Vypočítajte determinant matice úpravou na trojuholníkový tvar: $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$.

8. Majme zobrazenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticou $A = \left(\begin{smallmatrix}3&0&1\\1&2&1\\2&1&1\end{smallmatrix}\right)$, t.j. $\varphi : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$. Nájdite všetky $\vec{x}$, ktoré sa zobrazia do $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$. Nájdite všetky $\vec{x}$, ktoré sa zobrazia do $\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\2\end{smallmatrix}\right)$.

9. Pre zobrazenie φ z predchádzajúceho príkladu uvažujme množinu $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3\}$. Ukážte, že $\mathrm{Im}(\varphi)$ je vektorový priestor generovaný vektormi $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$. Aká je jeho dimenzia? Patrí vektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\3\end{smallmatrix}\right)$ do $\mathrm{Im}(\varphi)$?