Matematika II. – Domáca úloha č. 6

Cvičenia v týždni 26. marca 2007

---

1. Majme maticu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Pomocou Cramerovho pravidla nájdite riešenia rovníc: $Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Čomu sa budú rovnať súčiny matíc $A \begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} A$?

2. Majme lineárne zobrazenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticou $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ a predpisom $x \mapsto Ax$. Vieme, že $\varphi(e_1) = a_1$, $\varphi(e_2) = a_2$, $\varphi(e_3) = a_3$. Nájdte podmienku, vyjadrenú pomocou vlastností matice A, na to, aby vektory $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ tvorili bázu $\mathbb{R}^3$.

3. Ukážte, že vektory $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tvoria bázu $\mathbb{R}^3$. Vyjadrite každý z vektorov e_1, e_2, e_3 ako lineárnu kombináciu vektorov a_1, a_2, a_3 - t.j. nájdite koeficienty c_{ij} v rovniciach $e_j = c_{1j}a_1 + c_{2j}a_2 + c_{3j}a_3$ pre $j = 1, 2, 3$. Čo viete povedať o matici (c_{ij})?

4. Nájdite vyjadrenie vektora $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pomocou vektorov a_1, a_2, a_3 z príkladu č. 3.
Pomôcka: Vektor u vieme napísať ako $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

5. a) Nájdite formulu pre maticu A^n, kde $A = BCB^{-1}$. A, B, C sú matice typu $n \times n$.
b) Nájdite n-tú mocninu matice $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ ak vieme, že $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory - t.j. netriviálne riešenia rovnice $Ax = \lambda x$.
Pomôcka: charakteristický polynóm (t.j. $\det(A - \lambda I)$ by mal výjsť $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$ (pozri tiež strany 61–63 v poznámkach)

7. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Pre maticu A z príkladu č. 7 uvažujme lineárne zobrazenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané predpisom $x \mapsto Ax$. Načrtnite obraz jednotkovej kružnice v zobrazení φ, určite hlavné osi výslednej elipsy a vypočítajte ich dĺžku. Porovnajte s výsledkom príkladu č. 7.

Pri náčrte sa pokúste o presnosť – zvoľte dostatočný počet bodov na jednotkovej kružnici, použite pravítko, štvorčekový papier, atď. (niekedy pomáha veci "uvidieť" ...)