

1. Riešte systémy rovníc

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right), \quad \text{c) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{array} \right).$$

2. Rozhodnite pre ktoré $c \in \mathbb{R}$ sú nasledujúce systémy riešiteľné a nájdite ich riešenie

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \end{array} \right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 & c \\ 1 & 1 & c & c^2 \end{array} \right).$$

3. Zistite či vektory α, β, γ generujú celý priestor $\mathbb{R}^3$ ak

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{b) } \alpha &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \text{c) } \alpha &= \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. a) Nech M je podpriestor (rovina) v $\mathbb{R}^3$ generovaný vektormi $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, teda M sa dá opísať ako $M = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$. Nájdite také $a, b, c \in \mathbb{R}$, aby platilo $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid ax + by + cz = 0 \right\}$.

b) Nech $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x + 3y + 5z = 0 \right\}$. Nájdite dva vektory, ktoré generujú M .

5. Zistite či sú uvedené vektory lineárne závislé

$$\begin{aligned} \text{a) } (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 5) &\in \mathbb{R}^3, \\ \text{b) } (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 5), (1, 127, 3) &\in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

6. Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ sú dva vektory. Ukážte, že priestor generovaný vektormi α, β je rovnaký ako priestor generovaný vektormi $\alpha + \beta$ a $\alpha - \beta$.

7. Nech α, β, γ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú nasledujúce n -tice vektorov lineárne závislé

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha, \beta, \alpha + \beta, \gamma, \\ \text{b) } \alpha, \beta, \vec{0}, \\ \text{c) } \alpha, \alpha, \beta, \gamma \\ \text{d) } \alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma, \\ \text{e) } \alpha, \alpha + \alpha + \alpha, \beta. \end{aligned}$$

7. Dokážte, že pre ľubovoľný výber čísel $a, b, c \in \mathbb{R}$ tvoria vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázu $\mathbb{R}^3$.

8. Nech α, β, γ je ľubovoľná báza priestoru $\mathbb{R}^3$. Rozhodnite, či nasledujúce systémy tiež tvoria bázu priestoru $\mathbb{R}^3$

$$\text{a) } \alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, \quad \text{b) } \alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma, \quad \text{c) } \alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha.$$

9. Doplňte vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ na bázu priestoru $\mathbb{R}^3$.

10. Zistite, či nasledujúce vektory tvoria bázu vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

11. Zistite, ktoré z uvedených vektorov patria do podpriestoru generovaného vektormi $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

12. Zistite ako závisí hodnosť nasledujúcich matíc od parametra c a t

$$\begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & t & 2t \\ 1 & -1 & 3 & -t \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Zistite, ktoré z uvedených matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

14. Zistite, či existuje lineárne zobrazenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spĺňajúce

a) $\varphi(2, 0, 3) = (2, -1, 1)$, $\varphi(4, 1, 5) = (5, -2, 1)$, $\varphi(3, 1, 2) = (-1, 1, -1)$,

b) $\varphi(1, 1, 1) = (1, 0, 1)$, $\varphi(2, 0, 1) = (-1, 0, -1)$, $\varphi(3, 1, 2) = (0, 0, 0)$,

c) $\varphi(1, 1, 1) = (-2, 1, 2)$, $\varphi(2, 0, 1) = (1, -1, 0)$, $\varphi(3, 1, 2) = (-1, 0, 1)$.

Ak také zobrazenie existuje, nájdite jeho maticu.

15. Dokážte, že ak systém dvoch rovníc s dvoma neznámymi má dve rôzne riešenia, potom ich má nekonečne veľa.

16. Nech $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ukážte, že existuje nekonečne veľa vektorov $b \in \mathbb{R}^3$ takých, že rovnica $Ax = b$ nemá riešenie, a tiež nekonečne veľa takých vektorov b , že rovnica má nekonečne veľa riešení.

17. Nájdite homogénny systém s najmenším počtom rovníc, aby vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ boli jeho riešením.

18. Vypočítajte determinanty matíc

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Okrem toho si precvičte príklady na inverzné matice, maticové operácie, diagonalizáciu matíc, vlastné čísla a vektory, pojem grupy, vektorový a skalárny súčin v $\mathbb{R}^3$, vzdialenosti bodu od priamky či roviny a pod.