Matematika II. – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 16. apríla 2007

---

1. Nájdite charakteristické polynómy, vlastné čísla a vlastné vektory matíc:
a) $\begin{pmatrix} 1&0&2\\ 0&2&0\\ 2&0&1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&1\\ 0&1&-1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} \sin\alpha&0&\cos\alpha\\ 0&1&0\\ -\cos\alpha&0&\sin\alpha \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$.

2. Nájdite charakteristický polynóm matice:

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

3. Nech A je matica typu 3×3. Ukážte, že súčet jej vlastných čísel sa rovná tzv. *stope* matice A, t.j. súčtu prvkov na diagonále matice A a súčin vlastných čísel sa rovná $-\det(A)$.

4. Majú matice A a A^T rovnaké vlastné čísla? Rovnaké vlastné vektory?

5. a) Ukážte, že matica typu 2×2, ktorá má kladné zložky, má dve rôzne reálne vlastné čísla.
b) Ukážte, že vlastný vektor prislúchajúci väčšiemu vlastnému číslu leží v prvom kvadrante $\mathbb{R}^2$, a vlastný vektor prislúchajúci menšiemu vlastnému číslu leží v druhom kvadrante $\mathbb{R}^2$.

6. Nech matica A typu 3×3 má vlastné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a prislúchajúce vlastné vektory $\begin{pmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} | \\ v_3 \\ | \end{pmatrix}$.

a) Zistite čomu sa rovná súčin matíc

$$A\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

b) Nájdite maticu D tak, aby platilo

$$A\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} D.$$