Matematika II. – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždni 23. apríla 2007

---

1. Nech A je matica typu 3×3, λ_1, λ_2, λ_3 sú jej vlastné čísla a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ prislúchajúce vlastné vektory. Vo väčšine prípadov budú vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ a $\vec{v}_3$ tvoriť bázu priestoru $\mathbb{R}^3$. To znamená, že ľubovoľný vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sa dá jednoznačne vyjadriť ako $\vec{b} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$. Nájdite vyjadrenie vektora $A\vec{b}$ v báze $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

Pomôcka: využite fakt, že $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sú vlastné vektory matice A, t.j. $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ pre $i = 1, 2, 3$.

2. a) Pre maticu A a vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{b}$ z príkladu č. 1 nájdite vyjadrenie pre vektor $A^n\vec{b}$.
b) Ukážte, že pre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$ dostaneme $\lim_{n\to\infty} A^n\vec{b} = \vec{0}$.

Ak matice A, B spĺňajú rovnosť $B = P^{-1}AP$ pre nejakú regulárnu maticu P, hovoríme, že sú navzájom *podobné*. Spravidla sa pre danú maticu A snažíme nájsť takú maticu P, aby B bola diagonálna. Proces hľadania takých P a B nazývame *diagonalizáciou matice* A. Nasledujúce príklady ukazujú, že diagonalizácia úzko súvisí s vlastnými číslami a vlastnými vektormi.

3. a) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
b) Utvorte z vlastných vektorov v_1, v_2, v_3 maticu $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ a vypočítajte súčin $P^{-1}AP$.
c) Porovnajte s príkladom č. 6 z predchádzajúcej úlohy.

4. Diagonalizujte nasledujúce matice:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Skúste diagonalizovať maticu $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kde v procese diagonalizácie vznikne problém? Prečo?

6. Nech A a B sú podobné matice, t.j. $B = P^{-1}AP$. Ukážte, že:
a) $\det(A) = \det B$,
b) matice A a B majú rovnaké charakteristické polynómy a vlastné čísla,
c) ak x je vlastný vektor matice A, potom $P^{-1}x$ je vlastný vektor matice B.
d) napriek tomu, že matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ majú rovnaké charakteristické polynómy a vlastné čísla nie sú podobné.