Matematika II. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 30. apríla 2007

Zdá sa, že niektoré postupy (násobenie matíc, riešenie sústav, hľadanie vlastných čísel a pod.) Vám idú oveľa lepšie, ak sa počítajú s konkrétnymi číslami, na rozdiel od počítania s "písmenkami" - t.j. toho, čo je podstatou *Algebry* - manipulácie s výrazmi.

Preto v niektorých nasledujúcich príkladoch okrem počítania s konkrétnymi číslami, je tiež dôležité (ak nie dôležitejšie), aby ste boli schopní aplikovať metódu aj vo všeobecnom prípade.

1. Pre vektory $\vec{a}$ a $\vec{p}$ nájdite rozklad vektora $\vec{a}$ na zložky $\vec{a}_\perp$ a $\vec{a}_\|$, tak aby $\vec{p} \perp \vec{a}_\perp$ a $\vec{p} \parallel \vec{a}_\|$. T.j. treba nájsť ortogonálne projekcie vektora $\vec{a}$ v smere vektora $\vec{p}$ a v smere kolmom na vektor $\vec{p}$.

Počítajte pre dvojice: a) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, b) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, c) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{p} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, d) $\vec{a}$, $\vec{p}$.

Návod: využite platnosť nasledujúcich vzťahov:

- $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\|$
- $\vec{p} \perp \vec{a}_\perp$ teda pre skalárny súčin platí $(\vec{p}, \vec{a}_\perp) = \vec{p}^T \vec{a}_\perp = 0$
- $\vec{p} \parallel \vec{a}_\|$ teda platí $\vec{a}_\| = k\vec{p}$ a $(\vec{p}, \vec{a}_\|) = (\vec{p}, k\vec{p}) = k\vec{p}^T\vec{p} = k|\vec{p}|^2$.

2. Nájdite maticu P, ktorá zobrazí vektor x na jeho projekciu $x_\|$ v smere vektora $p = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, resp. v smere ľubovoľného vektora p. *Návod:* pre $p = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ zistite kam sa zobrazia vektory e_1, e_2, e_3.

3. Doplňte vektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ na ortogonálnu bázu priestoru $\mathbb{R}^3$ (t.j. takú trojicu vektorov, ktoré budú generovať celé $\mathbb{R}^3$ a budú navzájom kolmé).

4. Uvažujme nadrovinu $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$. Priestor M bude trojrozmerný podpriestor v $\mathbb{R}^4$. Nájdite ortogonálnu bázu priestoru M.

5. Rovnica $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 = r^2$ opisuje tzv. *kvadriku* v $\mathbb{R}^3$. V závislosti od vlastností koeficientov a, b, c, d, e, f môže ísť o elipsoid, eliptický hyperboloid, paraboloid a podobne.

Nájdite symetrickú maticu A typu 3×3, tak aby platilo:

$$(x, y, z)A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = r^2.$$

6. Pre maticu $A = \left(\begin{smallmatrix}2&3&1\\3&5&1\\1&1&2\end{smallmatrix}\right)$ a vektor $b = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ uvažujme *kvadratickú formu* danú predpisom $K(b) = b^T Ab$.

a) Ukážte, že $K(b) = (x + 2y)^2 + (x + y + z)^2 + z^2$.

b) Uvažujme maticu $L = \left(\begin{smallmatrix}1&2&0\\1&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$. Vypočítajte súčin Lb.

c) Ukážte, že $K(b) = (Lb)^T Lb$, a teda aj $A = L^T L$.