Matematika II. – Domáca úloha č. 12

Cvičenia v týždni 7. mája 2007

Na minulom cvičení sme si ukázali, že kvadratickú formu $K = ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$ môžeme maticovo zapísať ako

$$K = (x, y, z) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

V tejto sérii úloh si ukážeme metódu, ktorou dostaneme *diagonálny tvar* tejto kvadratickej formy, t.j. nájdeme príslušné koeficienty a znamienka, aby platilo $K = \pm(p_1x + r_1y + s_1z)^2 \pm (p_2x + r_2y + s_2z)^2 \pm (p_3x + r_3y + s_3z)^2$.

1. Majme symetrickú maticu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ a označme $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Všimnime si, že všetky členy kvadratickej formy $K(v) = v^T Av$, v ktorých sa vyskytuje 'x', zodpovedajú prvému riadku a prvému stĺpcu matice A. Tento riadok a stĺpec môžeme (mimo diagonály) vynulovať nasledovne:

a) ukážte, že kvadratickú formu K môžeme prepísať ako $K = (\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}y + \frac{c}{\sqrt{a}}z)^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2 + 2(e - \frac{bc}{a})yz + (f - \frac{c^2}{a})z^2$.

b) ukážte, že kvadratickú formu K môžeme prepísať ako $K = a(x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z)^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2 + 2(e - \frac{bc}{a})yz + (f - \frac{c^2}{a})z^2$.

Poznámka: tento zápis je niekedy výhodnejší ako predchádzajúci – vyhneme sa členom obsahujúcim $\sqrt{a}$.

c) ukážte, že platí $\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ \frac{b}{\sqrt{a}} & 1 & 0 \\ \frac{c}{\sqrt{a}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d-\frac{b^2}{a} & e-\frac{bc}{a} \\ 0 & e-\frac{bc}{a} & f-\frac{c^2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} & \frac{c}{\sqrt{a}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$

d) ukážte, že platí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d-\frac{b^2}{a} & e-\frac{bc}{a} \\ 0 & e-\frac{bc}{a} & f-\frac{c^2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$

e) po vynulovaní prvého riadku (a stĺpca) sme problém diagonalizácie kvadratickej formy znížili o jednu dimenziu - t.j. potrebujeme diagonalizovať formu $K' = (d - \frac{b^2}{a})y^2 + 2(e - \frac{bc}{a})yz + (f - \frac{c^2}{a})z^2$, resp. maticu $\begin{pmatrix} d-\frac{b^2}{a} & e-\frac{bc}{a} \\ e-\frac{bc}{a} & f-\frac{c^2}{a} \end{pmatrix}$. Ako by sme mali postupovať ďalej?

2. Aplikujte metódu diagonalizácie kvadratickej formy z príkladu č. 1 na nasledujúce matice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. V príklade č. 1, v častiach c) a d) sme našli matice P a B také, že platilo $PBP^T = A$. Pritom matica B bola prvým "krokom" k diagonálnej matici D, ktorú by sme chceli v procese diagonalizácie získať.

Pre matice z príkladu č. 2 nájdite rozklad $PDP^T = A$, kde D bude diagonálna matica a P bude regulárna.

4. Matice z príkladu č. 2 diagonalizujte "od spodu" - t.j. začnite nulovaním premennej 'z' v treťom riadku a stĺpci, potom vynulujte permennú 'y' a nakoniec 'x'. Porovnajte s výsledkom príkladu č. 2.

5. a) Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory dĺžky 1, vyjadrite maticu A ako súčin $A = PDP^{-1}$ (pozri príklady z úlohy č. 10).

b) Skúste použiť rozklad $A = PDP^{-1}$ pre diagonalizáciu kvadratickej formy v^tAv.