Maticový počet – Úloha č. 2

Cvičenia v týždni 8. októbra 2018

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Calculus and Applied Linear Algebra.*

1. (1.6.6) Ukážte, že systém

$$\begin{aligned} v - w - x - y - z &= 0,\\ w - x - y - z &= 0,\\ x - y - z &= 0,\\ y - z &= 0,\\ z &= 1, \end{aligned}$$

je zle podmienený porovnaním s perturbovaným systémom:

$$\begin{aligned} v - w - x - y - z &= 0,\\ -\frac{1}{15}v + w - x - y - z &= 0,\\ -\frac{1}{15}v + x - y - z &= 0,\\ -\frac{1}{15}v + y - z &= 0,\\ -\frac{1}{15}v + z &= 1. \end{aligned}$$

2. (3.7.8) Ak sú A, B a $A+B$ regulárne, ukážte, že platí

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = \left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}.$$

3. (3.7.10) Overte, že pre matice $A_{r\times r}$, $B_{s\times s}$ a $C_{r\times s}$, pričom A a B sú regulárne, platí

(a) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

4. (3.7.11) Uvažujme blokovú maticu $\begin{pmatrix} A_{r\times r} & C_{r\times s} \\ R_{s\times r} & B_{s\times s} \end{pmatrix}$. Ak príslušné inverzné matice existujú, matice definované vzťahmi

$$S = B - RA^{-1}C \qquad \text{a} \qquad T = A - CB^{-1}R$$

sa nazývajú *Schurove doplnky* A, resp. B.

(a) Overte, že ak A a S sú regulárne, potom

$$\begin{pmatrix} A & C \\ R & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}CS^{-1}RA^{-1} & -A^{-1}CS^{-1} \\ -S^{-1}RA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Overte, že ak B a T sú regulárne, potom

$$\begin{pmatrix} A & C \\ R & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} T^{-1} & -T^{-1}CB^{-1} \\ -B^{-1}RT^{-1} & B^{-1}+B^{-1}RT^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}.$$

5. (3.8.3) Predpokladajme, že maticu koeficientov regulárneho systému $Ax = b$ aktualizujeme a dostaneme nový regulárny systém $(A + cd^T)z = b$, kde $b, c, d \in \mathbb{R}^n$. Ak y je riešením $Ay = c$, ukážte, že $z = x - y^T d^T x/(1 + d^T y)$.

6. (3.8.4) (a) Použite Sherman-Morrisonovu formulu na dôkaz toho, že ak je A regulárna, potom $A + \alpha e_i e_j^T$ je regulárna pre dostatočne malé α.

(b) Použite časť (a) na dôkaz toho, že $I + E$ je regulárna, ak sú všetky zložky ϵ_{ij} matice E dostatočne malej veľkosti. Toto je alternatívne zdôvodnenie k využitiu Neumannovho radu pre dôkaz existencie $(I + E)^{-1}$.

7. (3.8.5) Pre dané matice A a B, kde A je regulárna, zdôvodnite, prečo bude regulárna aj matica $A + \epsilon B$ pre dostatočne malé ϵ. Inými slovami, ukážte, že malé perturbácie regulárnej matice sú opäť regulárne, resp. že regulárne matice tvoria otvorenú množinu v priestore matíc.

8. (3.8.6) Odvoďte Sherman-Morrison-Woodburyho formulu

$$(A + CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I + D^T A^{-1} C)^{-1} D^T A^{-1}.$$

Návod: (3.7.11) a pozrite sa na súčin $\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ D^T & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^T & I \end{pmatrix}$.

9. (3.8.8) Predpokladajme, že zložky v $A(t)$, $x(t)$ a $b(t)$ sú diferencovateľné funkcie v premennej t a pre všetky t platí $A(t)x(t) = b(t)$.

(a) Za predpokladu existencie $A(t)^{-1}$ zdôvodnite platnosť

$$\frac{dA(t)^{-1}}{dt} = -A(t)^{-1} A'(t) A(t)^{-1}.$$

(b) Odvoďte rovnicu

$$x'(t) = A(t)^{-1} b'(t) - A(t)^{-1} A'(t) x(t).$$

Toto dokazuje, že A^{-1} zväčšuje okamžitú zmenu v A aj okamžitú zmenu v b, čím sa potvrdzuje pozorovanie, že citlivosť regulárneho systému na malé perturbácie je priamo úmerná veľkosti zložiek A^{-1}.

Pozri prípadne (3.5.9) pre deriváciu súčinu matíc.