# Maticový počet – Úloha č. 4

Cvičenia v týždni 22. októbra 2018

---

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Calculus and Applied Linear Algebra.*

**1.** (4.5.13) Vykonajte nasledujúce výpočty s maticami:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2,01 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1,01 \end{pmatrix}.$$

(a) Nájdite $h(A)$ a riešte $Ax = b$ v presnej aritmetike.
(b) Nájdite $h(A^T A)$ a riešte $A^T Ax = A^T b$ presne.
(c) Nájdite $h(A)$ a riešte $Ax = b$ v trojčíslicovej aritmetike.
(d) Nájdite $A^T A$, $A^T b$ a riešenie $A^T Ax = A^T b$ v trojčíslicovej aritmetike.

**2.** (4.5.18) Ak $A$ je štvorcová $n \times n$ matica, ukážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:
(a) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(A^2\right)$.
(b) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}\left(A^2\right)$.
(c) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$.

**3.** (4.5.19) Nech $A$, $B$ sú $n \times n$ matice spĺňajúce $A^2 = A$, $B^2 = B$ a $AB = BA = 0$.
(a) Ukážte, že $h(A + B) = h(A) + h(B)$. *Návod:* Pozrite sa na $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)(A + B)(A \,|\, B)$.
(b) Ukážte, že $h(A) + h(I - A) = n$.

**4.** (4.5.20) *Moore–Penroseova pseudoinverzia.* Nech pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ s $h(A) = r$ je $A = BC$ rozklad matice $A$ na faktory $B_{m\times r}$ a $C_{r\times n}$, pričom matica $B$ pozostáva z "pivotových" stĺpcov matice $A$ a $C$ je tvorená $r$ nenulovými riadkami redukovaného stupňovitého tvaru $E_A$. Matica $A^\dagger$ definovaná vzťahom

$$A^\dagger = C^T (B^T AC^T)^{-1} B^T$$

sa nazýva *Moore–Penroseovou (pseudo)inverznou* maticou k matici $A$.

(a) Zdôvodnite, prečo je matica $B^T AC^T$ regulárna.

(b) Overte, že $x = A^\dagger b$ je rešením systému normálnych rovníc $A^T Ax = A^T b$ (a tiež $Ax = b$, ak je tento systém konzistentný).

(c) Ukážte, že všeobecné riešenie $A^T Ax = A^T b$ (a tiež $Ax = B$, ak je konzistnentný) sa dá popísať ako

$$x = A^\dagger + (I - A^\dagger A)h,$$

kde $h$ je "voľná premenná" – ľubovoľný vektor v $\mathbb{R}^n$.

(d) Zdôvodnite, prečo v prípade $h(A) = n$ bude platiť $A^\dagger = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$.

(e) Vysvetlite prečo pre $A$ štvorcovú regulárnu platí $A^\dagger = A^{-1}$.

(f) Overte, že $A^\dagger = C^T (B^T AC^T)^{-1} B^T$ spĺňa Penroseove rovnice:

$$AA^\dagger A = A, \qquad (AA^\dagger)^T = AA^\dagger$$
$$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \qquad (A^\dagger A)^T = A^\dagger A.$$

*Pozn.* Penrose pôvodne definoval $A^\dagger$ ako jediné riešenie týchto štyroch maticových rovníc.

**5.** (4.6.1) Hookov zákon hovorí, že výchylka $y$ ideálnej pružiny lineárne závisí od sily $x$, ktorou sa na ňu pôsobí – t.j. $y = kx$ pre nejakú konštantu $k$ – *tuhosť pružiny* . Majme strunu s neznámou tuhosťou, zavesme na ňu postupne rôzne závažia a zmerajme odchýlky. Výsledky sú zaznamenané v tabuľke. Použite metódu najmenších štvorcov na určenie $k$.

| $x$ (kg) | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ (cm) | 11,1 | 15,4 | 17,5 | 22,0 | 26,3 |

**6.** (4.6.6) Pri štúdiu rakoviny výskumník došiel k hypotéze, že z krátkodobého hľadiska počet zhubných nádorových buniek $y$ rastie exponenciálne vzhľadom na čas $t$. T.j. $y = \alpha_0 e^{\alpha_1 t}$. Určite parametre $\alpha_0$ a $\alpha_1$ metódou najmenších štvorcov z nasledujúcich dát:

| $t$ (dni) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ (bunky) | 16 | 27 | 45 | 74 | 122 |

*Návod:* Aká bežná transformácia mení exponenciálnu funkciu na lineárnu?

**7.** (4.6.7) Použitím metódy najmenších štvorcov nájdite pre nasledujúce dáta najlepšiu lineárnu aproximáciu – priamku $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ a najlepšiu kvadratickú aproximáciu – parabolu $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Rozhodnite, ktorá z týchto dvoch kriviek lepšie pasuje k dátam porovnaním súčtu štvorcov chýb.

| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 7 | 9 | 12 | 13 | 14 | 14 | 13 | 10 | 8 | 4 |

**8.** (4.6.9) Pre $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$ ukážte, že $x_2$ je riešením systému $Ax = b$ v najmenších štvorcoch práve vtedy, keď $x_2$ je časťou riešenia väčšieho systému

$$\begin{pmatrix} I_{m\times m} & A \\ A^T & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Pozn.* Nezriedka sa stáva, že pri probléme najmenších štvorcov je matica $A$ extrémne veľká, ale pomerne riedka. Pre takéto matice obsahuje predchádzajúci systém spravidla výrazne menej nenulových zložiek ako systém normálnych rovníc, čo pomáha prekonať problémy s pamäťou, ktorými veľké systémy normálnych rovníc zvyknú trpieť. Tiež si treba všimnúť, že tento systém sa vyhýba explicitnému výpočtu $A^T A$, čím sa vyhneme nárastu zlej podmienenosti/zaokrúhľovacej chyby.