

Úlohy (strany a číslovanie) sú z knihy Carla D. Meyera *Matrix Calculus and Applied Linear Algebra*.

Zostali nám ešte poriadne resty z minulých úloh ...

**1.** (5.13.14) Nech  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  sú podpriestory priestoru  $\mathcal{V}$  a  $P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}$  sú príslušné ortogonálne projekčné operátory.

(a) Ukážte, že  $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{M}}) + \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{M} + \mathcal{N}$ .

(b) Vysvetlite prečo  $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$  práve vtedy, keď  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$ .

(b) Zdôvodnite, prečo je  $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$  projekčný operátor práve vtedy, keď  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$ . V tom prípade  $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$  a  $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ .

**2.** (5.13.15) *Andersonova–Duffinova formula.* Ukážte, že ak  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  sú podpriestory toho istého priestoru, potom ortogonálny projektor na  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$  je daný vzorcom  $P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}} = 2P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{N}}$ .

*Návod:* Použite vzťah (5.13.12, str. 435) a predošlé cvičenie na odvodenie  $P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{M}}$ . Označiac  $Z = 2P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^{\dagger}P_{\mathcal{N}}$ , z toho odvoďte  $Z = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}Z = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$ .

**3.** (5.5.3) Použite Gram–Schmidtov proces so štandardným hermitovským skalárnym súčinom v  $\mathbb{C}^3$  na vektory  $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ .

**4.** (5.5.5) Vysvetlite, čo sa stane, ak sa Gram–Schmidtova ortogonalizácia použije na lineárne závislú množinu vektorov.

**5.** (5.5.8) Ukážte, že ak  $h(A_{m \times n}) = n$ , potom je obdĺžnikový  $QR$  rozklad matice  $A$  jednoznačný. T.j. ak  $A = QR$ , kde  $Q_{m \times n}$  má ortonormálne stĺpce a  $R_{n \times n}$  je horná trojuholníková s kladnými zložkami na diagonále, potom sú  $Q$  a  $R$  určené jednoznačne.

**6.** (5.5.11) Nech  $\mathcal{V}$  je priestor spojitých reálnych funkcií na intervale  $[-1, 1]$  so skalárnym súčinom definovaným ako

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

a  $\mathcal{S}$  je podpriestor  $\mathcal{V}$  generovaný tromi lineárne nezávislými polynómami  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = x$  a  $p_2 = x^2$ .

(a) Použite Gram–Schmidtovu ortogonalizáciu na nájdenie ortogonálnej množiny  $\{q_0, q_1, q_2\}$ , ktorá generuje  $\mathcal{S}$ . Toto sú prvé tri tzv. normalizované *Legendrove polynómy*.

(b) Overte, že  $q_n$  spĺňajú *Legendrovu diferenciálnu rovnicu*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

pre  $n = 0, 1, 2$ .